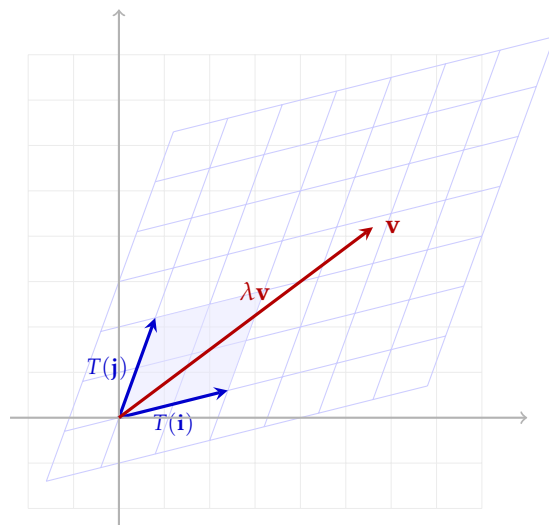

MODUL PELATIHAN ONMIPA 2026

ALJABAR LINEAR

Panduan Komprehensif: Dari Dasar hingga Persiapan Kompetisi



Disusun Oleh:
Filza Buana Putra
2026

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas terselesainya penyusunan **Modul Pelatihan ONMIPA 2026: Aljabar Linear** ini. Modul ini disusun dengan tujuan utama untuk memberikan panduan belajar yang terstruktur bagi para mahasiswa maupun peminat matematika yang ingin memperdalam pemahaman mereka di bidang aljabar linear.

Aljabar linear bukan sekadar manipulasi angka dalam matriks, melainkan bahasa universal yang menghubungkan berbagai cabang matematika, fisika, hingga ilmu komputer. Oleh karena itu, modul ini dirancang untuk menyeimbangkan antara aspek komputasi prosedural dengan pemahaman konsep abstrak yang mendalam.

Secara garis besar, modul ini mencakup:

- Fondasi sistem persamaan linear dan operasi matriks.
- Eksplorasi ruang vektor dan transformasi linear sebagai objek geometri.
- Analisis nilai eigen, vektor eigen, hingga diagonalisasi.
- Pengenalan ruang hasil kali dalam yang membawa konsep jarak ke dalam abstraksi linear.

Modul ini juga dilengkapi dengan soal-soal latihan yang bervariasi, mulai dari tingkat dasar hingga pengayaan setara kompetisi nasional (*ONMIPA*), guna mengasah ketajaman logika dan kemampuan analisis pembaca.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan di masa mendatang. Akhir kata, semoga modul ini dapat memberikan manfaat yang nyata bagi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam penguasaan bidang aljabar linear.

Pontianak, Maret 2026

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Isi

Kata Pengantar	1
1 Matriks dan Determinan	1
1.1 Operasi Matriks dan Sifat Aljabar Matriks	1
1.1.1 Sifat-Sifat Aljabar Dasar	1
1.1.2 Transpose dan Trace	1
1.1.3 Soal Latihan Section 1.1	2
1.2 Sistem Persamaan Linear dan Invers	2
1.2.1 Operasi Baris Elementer dan Bentuk Eselon	2
1.2.2 Matriks Invers	3
1.2.3 Soal Latihan Section 1.2	3
1.3 Determinan	3
1.3.1 Definisi dan Sifat-Sifat Determinan	4
1.3.2 Determinan Matriks Blok	4
1.3.3 Soal Latihan Section 1.3	5
1.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 1	5
2 Ruang Vektor	7
2.1 Ruang Vektor Real dan Kompleks	7
2.1.1 Definisi Formal	7
2.1.2 Contoh-Contoh Ruang Vektor	8
2.1.3 Soal Latihan Section 2.1	8
2.2 Subruang dan Hasil Tambah Langsung	8
2.2.1 Kriteria Subruang	9
2.2.2 Hasil Tambah Langsung (Direct Sum)	9
2.2.3 Soal Latihan Section 2.2	9
2.3 Kebebaslinearan, Basis, dan Dimensi	10
2.3.1 Kombinasi Linear dan Rentangan	10
2.3.2 Kebebaslinearan Linear	10
2.3.3 Basis dan Dimensi	10
2.3.4 Soal Latihan Section 2.3	11
2.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 2	11
3 Transformasi Linear	13
3.1 Definisi dan Matriks Representasi	13
3.1.1 Definisi Transformasi Linear	13
3.1.2 Matriks Representasi	13

3.1.3	Soal Latihan Section 3.1	14
3.2	Peta, Inti, dan Teorema Rank-Nolitas	14
3.2.1	Inti (Kernel) dan Nolitas	15
3.2.2	Peta (Image) dan Rank	15
3.2.3	Teorema Rank-Nolitas	15
3.2.4	Soal Latihan Section 3.2	16
3.3	Keserupaan dan Proyeksi	16
3.3.1	Perubahan Basis dan Keserupaan	16
3.3.2	Operator Proyeksi	16
3.3.3	Soal Latihan Section 3.3	17
3.4	Soal Latihan Pengayaan Bab 3	17
4	Nilai dan Vektor Karakteristik	19
4.1	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	19
4.1.1	Definisi Dasar	19
4.1.2	Polinom Karakteristik	19
4.1.3	Soal Latihan Section 4.1	20
4.2	Diagonalisasi	20
4.2.1	Definisi dan Syarat Diagonalisasi	20
4.2.2	Multiplisitas Aljabar dan Geometris	21
4.2.3	Soal Latihan Section 4.2	21
4.3	Teorema Cayley-Hamilton	21
4.3.1	Pernyataan Teorema	22
4.3.2	Aplikasi Teorema	22
4.3.3	Soal Latihan Section 4.3	22
4.4	Soal Latihan Pengayaan Bab 4	23
5	Ruang Hasil Kali Dalam	24
5.1	Norma dan Keortogonalan	24
5.1.1	Hasil Kali Dalam	24
5.1.2	Norma dan Jarak	24
5.1.3	Keortogonalan	24
5.1.4	Soal Latihan Section 5.1	25
5.2	Proses Gram-Schmidt	25
5.2.1	Proyeksi Ortogonal	25
5.2.2	Algoritma Gram-Schmidt	25
5.2.3	Dekomposisi QR	26
5.2.4	Soal Latihan Section 5.2	27
5.3	Komplemen Ortogonal	27
5.3.1	Definisi Komplemen Ortogonal	27
5.3.2	Dekomposisi Ortogonal	27
5.3.3	Hubungan dengan Ruang Matriks	28
5.3.4	Soal Latihan Section 5.3	28
5.4	Soal Latihan Pengayaan Bab 5	28

6	Latihan Akhir	30
6.1	Bagian I: Isian Singkat	30
6.2	Bagian II: Esai	31

Bab 1

Matriks dan Determinan

1.1 Operasi Matriks dan Sifat Aljabar Matriks

Matriks merupakan susunan skalar dalam bentuk baris dan kolom yang mengikuti aturan aljabar tertentu. Pemahaman mengenai manipulasi aljabar matriks merupakan landasan dasar dalam mempelajari struktur aljabar linear yang lebih kompleks.

Diberikan matriks A, B, C dengan ukuran yang sesuai dan skalar $k, m \in \mathbb{F}$ (dengan $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

1.1.1 Sifat-Sifat Aljabar Dasar

Operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada matriks memenuhi sifat-sifat umum, namun perkalian dua matriks memiliki karakteristik yang membedakannya dari aljabar skalar:

1. **Asosiatif:** $A(BC) = (AB)C$.
2. **Distributif:** $A(B + C) = AB + AC$ dan $(B + C)A = BA + CA$.
3. **Non-Komutatif:** Secara umum, $AB \neq BA$. Jika berlaku $AB = BA$, maka matriks A dan B dikatakan saling komut (*commute*).

1.1.2 Transpose dan Trace

Dua fungsi penting dalam operasi matriks adalah transpose (A^T) dan trace ($\text{tr}(A)$).

Definisi 1.1. Trace dari matriks persegi $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ didefinisikan sebagai jumlah dari elemen-elemen diagonal utamanya:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposisi 1.2. Sifat aljabar pada transpose dan trace:

1. $(AB)^T = B^T A^T$.

2. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
4. $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$.

Contoh 1.1. Tunjukkan bahwa tidak ada matriks $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ yang memenuhi persamaan $AB - BA = I$.

Solusi: Gunakan sifat linearitas dan siklik dari trace. Ambil trace pada kedua ruas persamaan:

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA)$$

Berdasarkan sifat $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, maka ruas kiri bernilai 0. Di sisi lain, $\text{tr}(I)$ untuk matriks identitas ukuran $n \times n$ adalah n . Karena $0 \neq n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka tidak ada matriks A dan B yang memenuhi persamaan tersebut.

1.1.3 Soal Latihan Section 1.1

1. Buktikan bahwa jika A dan B adalah matriks simetris (yakni $A^T = A$ dan $B^T = B$), maka AB simetris jika dan hanya jika A dan B saling komut.
2. Misalkan A adalah matriks sedemikian sehingga $AA^T = 0$. Buktikan bahwa $A = 0$.
3. Jika A dan B adalah matriks persegi sehingga $AB = A$ dan $BA = B$, buktikan bahwa $A^2 = A$ dan $B^2 = B$.
4. Berikan contoh dua matriks $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ non-nol sehingga $AB = 0$.

1.2 Sistem Persamaan Linear dan Invers

Sistem Persamaan Linear (SPL) dapat direpresentasikan secara ringkas dalam bentuk persamaan matriks $Ax = b$. Penyelesaian dari sistem ini berkaitan erat dengan struktur matriks A , terutama mengenai kemampuan matriks tersebut untuk dibalik (memiliki invers).

1.2.1 Operasi Baris Elementer dan Bentuk Eselon

Untuk menyelesaikan SPL, digunakan Operasi Baris Elementer (OBE) yang tidak mengubah himpunan penyelesaian sistem. Terdapat tiga jenis OBE:

1. Menukarkan dua baris.
2. Mengalikan satu baris dengan skalar non-nol.
3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

Melalui OBE, matriks augmented $[A|b]$ dapat diubah menjadi bentuk eselon baris tereduksi (Reduced Row Echelon Form/RREF).

1.2.2 Matriks Invers

Definisi 1.3. Matriks persegi A berukuran $n \times n$ dikatakan memiliki invers (invertibel) jika terdapat matriks B sedemikian sehingga:

$$AB = BA = I$$

di mana I adalah matriks identitas. Matriks B dinyatakan sebagai A^{-1} .

Proposisi 1.4. Sifat-sifat aljabar invers matriks:

1. Jika A invertibel, maka A^{-1} tunggal.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. Jika A invertibel, maka persamaan $Ax = b$ memiliki solusi tunggal $x = A^{-1}b$.

Contoh 1.2. Misalkan A dan B adalah matriks persegi sehingga AB invertibel. Buktikan bahwa A dan B juga masing-masing harus invertibel.

Solusi: Karena AB invertibel, terdapat C sehingga $(AB)C = I$. Dengan sifat asosiatif, $A(BC) = I$. Ini menunjukkan bahwa A memiliki invers kanan. Untuk matriks persegi, keberadaan invers satu sisi menjamin keberadaan invers dua sisi. Argumen serupa berlaku untuk B dengan meninjau $C(AB) = I \implies (CA)B = I$.

1.2.3 Soal Latihan Section 1.2

1. Tentukan semua nilai k agar sistem persamaan berikut memiliki solusi tunggal:

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

2. Buktikan bahwa jika A adalah matriks yang memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$, maka A invertibel dan nyatakan A^{-1} dalam A .
3. Misalkan $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Jika $A + B = AB$, buktikan bahwa $AB = BA$. (Petunjuk: Tinjau bentuk $(I - A)(I - B)$).
4. Buktikan bahwa jika A adalah matriks nilpoten (terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $A^k = 0$), maka matriks $(I - A)$ invertibel.

1.3 Determinan

Determinan adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap matriks persegi ke sebuah skalar dalam lapangan $\mathbb{F}$. Nilai ini memberikan informasi penting mengenai sifat-sifat matriks, salah satunya adalah penentuan apakah matriks tersebut memiliki invers atau tidak.

1.3.1 Definisi dan Sifat-Sifat Determinan

Secara formal, determinan dapat didefinisikan melalui ekspansi kofaktor atau melalui permutasi. Namun, dalam praktik manipulasi aljabar, sifat-sifat berikut merupakan hal yang mendasar:

1. **Multilinearitas:** Determinan merupakan fungsi linear terhadap setiap baris (atau kolom) secara terpisah.
2. **Alternating (Berganti Tanda):** Jika dua baris (atau kolom) dari suatu matriks ditukarkan, maka nilai determinannya berganti tanda.
3. **Normalisasi:** $\det(I) = 1$.

Teorema 1.5. Berikut adalah sifat-sifat turunan yang sering digunakan dalam perhitungan:

1. $\det(A^T) = \det(A)$.
2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
3. $\det(kA) = k^n \det(A)$ untuk $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.
4. $\det(A) \neq 0$ jika dan hanya jika A invertibel. Jika A invertibel, maka $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
5. Jika matriks A memiliki baris atau kolom yang merupakan kelipatan dari baris atau kolom lain, maka $\det(A) = 0$.

1.3.2 Determinan Matriks Blok

Untuk matriks yang memiliki struktur blok tertentu, perhitungan determinan dapat disederhanakan.

Proposisi 1.6. Jika A dan C adalah matriks persegi, maka determinan matriks blok segitiga atas adalah:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Contoh 1.3. Misalkan A, B, C, D adalah matriks berukuran $n \times n$. Jika A memiliki invers dan $AC = CA$, buktikan bahwa:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Solusi: Karena A memiliki invers, kita dapat melakukan dekomposisi matriks blok sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Menggunakan sifat determinan matriks blok segitiga:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B)$$

Karena diketahui $AC = CA$, maka $ACA^{-1} = C$. Sehingga:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

1.3.3 Soal Latihan Section 1.3

1. Hitunglah determinan dari matriks $n \times n$ berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2. Misalkan A adalah matriks anti-simetris ($A^T = -A$) berukuran $n \times n$. Jika n adalah bilangan ganjil, buktikan bahwa $\det(A) = 0$.
3. Buktikan bahwa jika $A^k = 0$ untuk suatu bilangan asli k (matriks nilpoten), maka $\det(I + A) = 1$. (Petunjuk: Gunakan ekspansi aljabar $(I + A)^{-1}$ atau tinjau hasil kali matriks).
4. Jika $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, tunjukkan bahwa determinan dari matriks blok $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ selalu non-negatif.

1.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 1

Bagian ini menyajikan soal-soal tingkat kesulitan tinggi yang menuntut ketelitian aljabar dan kemampuan generalisasi pola matriks.

Problem 1.1. Diberikan matriks $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ yang memenuhi $AB - BA = A$.

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli k , berlaku $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. Buktikan bahwa A adalah matriks nilpoten.

Problem 1.2. Hitunglah determinan dari matriks $n \times n$ berikut:

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$$

di mana x dan a adalah bilangan real.

Problem 1.3. Misalkan A dan B adalah matriks real berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $AB = BA$. Buktikan bahwa $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Berikan contoh penyangkal jika $AB \neq BA$.

Problem 1.4. Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ memiliki sifat bahwa jumlah dari elemen-elemen di setiap barisnya adalah sama dengan s . Buktikan bahwa s adalah nilai yang memenuhi $\det(A - sI) = 0$.

Problem 1.5. Diberikan matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dengan sifat $A^2 + I = 0$.

1. Buktikan bahwa n haruslah bilangan genap.
2. Buktikan bahwa $\det(A) = 1$.

Problem 1.6. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen $a_{ij} = \min(i, j)$. Hitunglah $\det(A)$.

Problem 1.7. Misalkan $A, B, C, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Jika $CD^T = DC^T$, buktikan bahwa determinan dari matriks blok

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

memenuhi $\det(M) \det(D^T) = \det(AD^T - BC^T)$.

Bab 2

Ruang Vektor

2.1 Ruang Vektor Real dan Kompleks

Konsep ruang vektor merupakan generalisasi dari sifat-sifat yang kita temukan pada vektor di $\mathbb{R}^n$. Dalam pandangan yang lebih luas, ruang vektor adalah sebuah himpunan objek (vektor) yang dilengkapi dengan dua operasi: penjumlahan dan perkalian skalar, yang memenuhi sekumpulan aksioma tertentu.

2.1.1 Definisi Formal

Misalkan $\mathbb{F}$ adalah lapangan ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Sebuah himpunan tak kosong V dikatakan sebagai ruang vektor atas $\mathbb{F}$ jika untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $a, b \in \mathbb{F}$, berlaku aksioma berikut:

1. **Tertutup terhadap Penjumlahan:** $u + v \in V$.
2. **Komutatif Penjumlahan:** $u + v = v + u$.
3. **Asosiatif Penjumlahan:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. **Identitas Penjumlahan:** Terdapat $0 \in V$ sehingga $v + 0 = v$.
5. **Invers Penjumlahan:** Terdapat $-v \in V$ sehingga $v + (-v) = 0$.
6. **Tertutup terhadap Perkalian Skalar:** $av \in V$.
7. **Distributif Skalar:** $a(u + v) = au + av$.
8. **Distributif Vektor:** $(a + b)v = av + bv$.
9. **Asosiatif Perkalian Skalar:** $a(bv) = (ab)v$.
10. **Identitas Perkalian Skalar:** $1v = v$, di mana 1 adalah identitas perkalian di $\mathbb{F}$.

2.1.2 Contoh-Contoh Ruang Vektor

Beberapa contoh standar yang sering muncul dalam analisis aljabar linear meliputi:

- **Ruang Koordinat:** $\mathbb{R}^n$ atau $\mathbb{C}^n$.
- **Ruang Matriks:** $M_{m \times n}(\mathbb{F})$, himpunan semua matriks berukuran $m \times n$.
- **Ruang Polinom:** $P_n(\mathbb{F})$, himpunan semua polinom dengan derajat maksimal n .
- **Ruang Fungsi:** $C[a, b]$, himpunan semua fungsi kontinu pada interval $[a, b]$.

Contoh 2.1. Tunjukkan bahwa himpunan $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ dengan operasi penjumlahan didefinisikan sebagai $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$ dan perkalian skalar $c(x, y) = (x^c, y^c)$ adalah sebuah ruang vektor.

Solusi: Kita harus memeriksa aksioma ruang vektor. Identitas penjumlahan dalam ruang ini bukanlah $(0, 0)$, melainkan $(1, 1)$ karena $(x, y) + (1, 1) = (x \cdot 1, y \cdot 1) = (x, y)$. Invers dari (x, y) adalah $(1/x, 1/y)$. Distributif skalar terpenuhi: $c((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = c(x_1 x_2, y_1 y_2) = ((x_1 x_2)^c, (y_1 y_2)^c) = (x_1^c x_2^c, y_1^c y_2^c) = c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2)$. Begitu pula dengan aksioma lainnya.

2.1.3 Soal Latihan Section 2.1

1. Periksalah apakah himpunan semua matriks $n \times n$ yang memiliki determinan nol merupakan ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Berikan alasannya.
2. Misalkan V adalah ruang vektor. Buktikan bahwa skalar nol dikalikan dengan vektor sembarang menghasilkan vektor nol ($0v = 0$).
3. Buktikan bahwa jika $v \in V$ dan $v \neq 0$, maka $av = bv$ berimplikasi $a = b$ untuk $a, b \in \mathbb{F}$.
4. Tunjukkan bahwa himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$. Berapakah dimensinya secara intuitif?

2.2 Subruang dan Hasil Tambah Langsung

Sering kali kita tidak perlu bekerja dengan seluruh ruang vektor V , melainkan cukup pada himpunan bagian tertentu yang masih mempertahankan struktur ruang vektor tersebut.

2.2.1 Kriteria Subruang

Definisi 2.1. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Himpunan bagian tak kosong $W \subseteq V$ disebut subruang dari V jika W juga merupakan ruang vektor di bawah operasi yang sama dengan V .

Untuk membuktikan W adalah subruang, kita cukup memeriksa kriteria berikut:

1. $\mathbf{0} \in W$ (Vektor nol ada di dalam W).
2. Untuk setiap $u, v \in W$, maka $u + v \in W$ (Tertutup terhadap penjumlahan).
3. Untuk setiap $c \in \mathbb{F}$ dan $v \in W$, maka $cv \in W$ (Tertutup terhadap perkalian skalar).

2.2.2 Hasil Tambah Langsung (Direct Sum)

Diberikan dua subruang U dan W dari V , kita dapat membentuk himpunan baru $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$, yang juga merupakan subruang dari V .

Definisi 2.2. Ruang vektor V dikatakan sebagai hasil tambah langsung dari subruang U dan W , ditulis $V = U \oplus W$, jika:

1. $V = U + W$.
2. $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Sifat utama dari hasil tambah langsung adalah setiap vektor $v \in V$ dapat dituliskan secara tunggal sebagai $v = u + w$ dengan $u \in U$ dan $w \in W$.

Contoh 2.2. Misalkan $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Misalkan U adalah himpunan matriks simetris ($A^T = A$) dan W adalah himpunan matriks anti-simetris ($A^T = -A$). Tunjukkan bahwa $V = U \oplus W$.

Solusi: Pertama, untuk setiap $A \in V$, kita dapat menuliskan:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

Di mana $\frac{A + A^T}{2} \in U$ dan $\frac{A - A^T}{2} \in W$. Maka $V = U + W$. Kedua, misalkan $A \in U \cap W$. Maka $A^T = A$ dan $A^T = -A$. Ini berimplikasi $A = -A$, sehingga $2A = 0$ atau $A = 0$. Maka $U \cap W = \{0\}$. Terbukti $V = U \oplus W$.

2.2.3 Soal Latihan Section 2.2

1. Misalkan $V = \mathbb{R}^3$. Periksalah apakah $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ merupakan subruang dari V .
2. Misalkan U dan W adalah subruang dari V . Buktikan bahwa $U \cap W$ adalah subruang dari V , namun $U \cup W$ belum tentu subruang (berikan contoh penyangkal).

3. Diberikan $V = P_2(\mathbb{R})$ (polinom derajat ≤ 2). Misalkan $U = \{p(x) \in V : p(0) = 0\}$ dan $W = \{p(x) \in V : p'(x) = 0\}$. Apakah $V = U \oplus W$? Jelaskan.
4. Buktikan bahwa jika $V = U \oplus W$, maka representasi $v = u + w$ bersifat tunggal.

2.3 Kebebaslinearan, Basis, dan Dimensi

Setelah memahami subruang, kita perlu menentukan cara paling efisien untuk membangun atau merentang suatu ruang vektor menggunakan sekumpulan vektor minimal.

2.3.1 Kombinasi Linear dan Rentangan

Definisi 2.3. Sebuah vektor v dikatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ jika terdapat skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$ sehingga:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

Himpunan semua kombinasi linear dari $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ disebut sebagai rentangan (*span*) dari S , dinotasikan dengan $\text{span}(S)$.

2.3.2 Kebebaslinearan Linear

Definisi 2.4. Himpunan vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dikatakan bebas linear (*linearly independent*) jika persamaan skalar:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = \mathbf{0}$$

hanya memiliki solusi trivial $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Jika terdapat solusi non-trivial, maka himpunan tersebut dikatakan bergantung linear (*linearly dependent*).

2.3.3 Basis dan Dimensi

Definisi 2.5. Himpunan vektor $\beta \subseteq V$ disebut sebagai basis bagi V jika:

1. β bebas linear.
2. $\text{span}(\beta) = V$.

Jumlah elemen dalam basis β disebut sebagai dimensi dari V , dinotasikan $\dim(V)$.

Teorema 2.6. Jika $V = U \oplus W$ dan V berdimensi hingga, maka:

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$$

Secara umum, untuk dua subruang sembarang berlaku:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Contoh 2.3. Tunjukkan bahwa himpunan $\beta = \{1, x, x^2\}$ adalah basis bagi $P_2(\mathbb{R})$ dan tentukan dimensinya.

Solusi: 1. **Bebas Linear:** Misalkan $c_0(1) + c_1(x) + c_2(x^2) = 0$ (polinom nol). Berdasarkan sifat polinom, suatu polinom bernilai nol untuk semua x jika dan hanya jika seluruh koefisiennya nol. Maka $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Terbukti bebas linear. 2. **Merentang:** Setiap polinom $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ secara definisi berbentuk $a_0 + a_1x + a_2x^2$, yang merupakan kombinasi linear dari β . Karena β bebas linear dan merentang $P_2(\mathbb{R})$, maka β adalah basis. Karena terdapat 3 elemen, maka $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$.

2.3.4 Soal Latihan Section 2.3

1. Tentukan apakah himpunan vektor $\{(1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, -1, 2)\}$ bebas linear di $\mathbb{R}^3$.
2. Misalkan $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis bagi V . Apakah $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ juga merupakan basis bagi V ? Jelaskan.
3. Diberikan subruang $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$. Tentukan satu basis untuk U dan hitung dimensinya.
4. Misalkan V berdimensi n . Buktikan bahwa setiap himpunan yang terdiri dari $n + 1$ vektor atau lebih di V pasti bergantung linear.

2.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 2

Bagian ini berisi soal-soal dengan tingkat kesulitan tinggi yang memerlukan pemahaman konsep ruang vektor secara mendalam serta kemampuan pembuktian yang kuat.

Problem 2.1. Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n . Misalkan U dan W adalah dua subruang dari V sedemikian sehingga $\dim(U) + \dim(W) > n$. Buktikan bahwa $U \cap W$ mengandung setidaknya satu vektor non-nol.

Problem 2.2. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Buktikan bahwa V tidak dapat dinyatakan sebagai gabungan berhingga dari subruang-subruang sejati $W_1, W_2, \dots, W_k$ (yakni $W_i \subsetneq V$ untuk semua i), asalkan lapangan $\mathbb{F}$ memiliki karakteristik nol atau memiliki jumlah elemen yang cukup besar ($|\mathbb{F}| \geq k$).

Problem 2.3. Misalkan $V = P_n(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor semua polinom dengan derajat maksimal n . Diberikan $n + 1$ bilangan real berbeda $x_0, x_1, \dots, x_n$. Definisikan polinom-polinom Lagrange:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Tunjukkan bahwa $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$ merupakan basis bagi V .

Problem 2.4. Misalkan W_1, W_2, W_3 adalah subruang dari ruang vektor V .

1. Tunjukkan bahwa secara umum $W_1 \cap (W_2 + W_3) \neq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.
2. Buktikan bahwa jika $W_1 \supseteq W_2$ atau $W_1 \supseteq W_3$ (sifat modular), maka:

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$$

Problem 2.5. Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi hingga dan W adalah subruang dari V . Buktikan bahwa terdapat subruang $U \subseteq V$ sedemikian sehingga $V = W \oplus U$. Apakah subruang U tersebut tunggal? Berikan penjelasan atau contoh penyangkal.

Problem 2.6. Diberikan matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Misalkan $V = \text{span}\{I, A, A^2, \dots\}$. Buktikan bahwa dimensi dari V maksimal adalah n .

Bab 3

Transformasi Linear

3.1 Definisi dan Matriks Representasi

Transformasi linear adalah pemetaan antar ruang vektor yang mempertahankan struktur operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Dalam dimensi hingga, setiap transformasi linear dapat direpresentasikan secara unik sebagai sebuah matriks.

3.1.1 Definisi Transformasi Linear

Definisi 3.1. Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Pemetaan $T : V \rightarrow W$ disebut transformasi linear jika untuk setiap $u, v \in V$ dan $c \in \mathbb{F}$ berlaku:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ (Additivitas)
2. $T(cu) = cT(u)$ (Homogenitas)

Dua syarat ini dapat dirangkum menjadi satu: $T(cu + v) = cT(u) + T(v)$.

Proposisi 3.2. Jika $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka:

1. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
2. $T(\sum_{i=1}^n c_i v_i) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i)$. Hal ini menunjukkan bahwa transformasi linear ditentukan sepenuhnya oleh nilai-nilainya pada sebuah basis bagi V .

3.1.2 Matriks Representasi

Misalkan V memiliki basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ dan W memiliki basis $\gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$. Setiap vektor $T(v_j)$ di W dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis γ :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Definisi 3.3. Matriks A berukuran $m \times n$ yang elemennya adalah a_{ij} disebut sebagai matriks representasi dari T terhadap basis β dan γ , dinotasikan dengan:

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = ([T(v_1)]_{\gamma} \quad [T(v_2)]_{\gamma} \quad \dots \quad [T(v_n)]_{\gamma})$$

di mana $[T(v_j)]_{\gamma}$ adalah koordinat vektor $T(v_j)$ terhadap basis γ .

Contoh 3.1. Tentukan matriks representasi dari operator turunan $D : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ dengan $D(p(x)) = p'(x)$ terhadap basis standar $\beta = \{1, x, x^2\}$ dan $\gamma = \{1, x\}$.

Solusi: Kita hitung bayangan dari setiap elemen basis β :

- $D(1) = 0 = 0(1) + 0(x) \implies [D(1)]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $D(x) = 1 = 1(1) + 0(x) \implies [D(x)]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $D(x^2) = 2x = 0(1) + 2(x) \implies [D(x^2)]_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Maka, matriks representasinya adalah:

$$[D]_{\beta}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Soal Latihan Section 3.1

1. Periksa apakah pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $T(x, y) = (x + y, x^2)$ merupakan transformasi linear.
2. Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah transformasi linear yang memetakan $(1, 0)$ ke $(2, 3)$ dan $(0, 1)$ ke $(-1, 4)$. Tentukan $T(5, -2)$.
3. Misalkan $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $T(A) = \text{tr}(A)$. Buktikan bahwa T adalah transformasi linear dan tentukan matriks representasinya terhadap basis standar $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
4. Buktikan bahwa jika $T : V \rightarrow W$ linear, maka $T(-v) = -T(v)$ untuk setiap $v \in V$.

3.2 Peta, Inti, dan Teorema Rank-Nolitas

Setiap transformasi linear T memiliki dua karakteristik ruang yang sangat penting untuk menentukan sifat pemetaan tersebut, seperti apakah pemetaan tersebut bersifat injektif atau surjektif.

3.2.1 Inti (Kernel) dan Nolitas

Definisi 3.4. Misalkan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear. Inti atau kernel dari T , dinotasikan $\ker(T)$, adalah himpunan semua vektor di V yang dipetakan ke vektor nol di W :

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}_W\}$$

Dimensi dari $\ker(T)$ disebut sebagai **nolitas** dari T .

3.2.2 Peta (Image) dan Rank

Definisi 3.5. Peta atau image dari T , dinotasikan $\text{im}(T)$ atau $R(T)$, adalah himpunan semua vektor di W yang merupakan bayangan dari vektor di V :

$$\text{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

Dimensi dari $\text{im}(T)$ disebut sebagai **rank** dari T .

Proposisi 3.6. Untuk ruang vektor V dan W dan pemetaan linear $T : V \rightarrow W$,

1. $\ker(T)$ adalah subruang dari V .
2. $\text{im}(T)$ adalah subruang dari W .
3. T bersifat injektif jika dan hanya jika $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

3.2.3 Teorema Rank-Nolitas

Teorema ini merupakan salah satu teorema paling fundamental dalam aljabar linear yang menghubungkan dimensi domain dengan dimensi dari inti dan peta.

Teorema 3.7 (Rank-Nolitas). Misalkan $T : V \rightarrow W$ adalah transformasi linear dengan V berdimensi hingga. Maka:

$$\dim(V) = \text{rank}(T) + \text{null}(T)$$

Contoh 3.2. Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Tentukan basis untuk $\ker(T)$ dan verifikasi Teorema Rank-Nolitas.

Solusi: Untuk $\ker(T)$, kita cari (x, y, z) sehingga $x + y = 0$ dan $y + z = 0$. Dari sini didapat $y = -x$ dan $z = -y = x$. Maka vektor di $\ker(T)$ berbentuk $(x, -x, x) = x(1, -1, 1)$. Basis $\ker(T) = \{(1, -1, 1)\}$, sehingga $\text{null}(T) = 1$. Karena domain $V = \mathbb{R}^3$ memiliki dimensi 3, maka menurut teorema: $3 = \text{rank}(T) + 1 \implies \text{rank}(T) = 2$. Karena $\text{rank}(T) = \dim(\mathbb{R}^2)$, maka T bersifat surjektif.

3.2.4 Soal Latihan Section 3.2

1. Misalkan $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai $T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$. Tentukan basis untuk $\ker(T)$ dan $\text{im}(T)$.
2. Buktikan bahwa jika $\dim(V) > \dim(W)$, maka tidak ada transformasi linear $T : V \rightarrow W$ yang bersifat injektif.
3. Misalkan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear sedemikian sehingga $T^2 = T$ (proyeksi). Buktikan bahwa $V = \ker(T) \oplus \text{im}(T)$.
4. Jika A adalah matriks $m \times n$, tunjukkan bahwa rank dari transformasi linear yang bersesuaian dengan A sama dengan rank baris dari matriks A .

3.3 Kecerupaan dan Proyeksi

Representasi matriks dari sebuah operator linear sangat bergantung pada pemilihan basis. Selain itu, terdapat kelas operator khusus yang disebut proyeksi, yang memiliki peran penting dalam dekomposisi ruang vektor.

3.3.1 Perubahan Basis dan Kecerupaan

Misalkan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear pada ruang vektor V . Jika kita memiliki dua basis yang berbeda, β dan γ , maka terdapat hubungan antara $[T]_\beta$ dan $[T]_\gamma$.

Teorema 3.8. Misalkan $P = [I]_\gamma^\beta$ adalah matriks transisi dari basis γ ke basis β . Maka berlaku:

$$[T]_\gamma = P^{-1}[T]_\beta P$$

Dua matriks A dan B dikatakan **serupa** (similar) jika terdapat matriks invertibel P sehingga $B = P^{-1}AP$. Matriks-matriks yang serupa merepresentasikan operator linear yang sama terhadap basis yang berbeda.

Proposisi 3.9. Jika A dan B serupa, maka:

1. $\det(A) = \det(B)$.
2. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
3. A dan B memiliki polinom karakteristik yang sama.

3.3.2 Operator Proyeksi

Definisi 3.10. Operator linear $P : V \rightarrow V$ disebut proyeksi jika $P^2 = P$ (idempoten).

Operator proyeksi membagi ruang vektor menjadi dua bagian yang saling komplementer terkait dengan peta dan intinya.

Teorema 3.11. Jika P adalah proyeksi pada V , maka:

1. $V = \text{im}(P) \oplus \text{ker}(P)$.
2. Untuk setiap $v \in \text{im}(P)$, berlaku $P(v) = v$.

Contoh 3.3. Tunjukkan bahwa jika P adalah proyeksi, maka $I - P$ juga merupakan proyeksi.

Solusi: Kita periksa sifat idempoten dari $I - P$:

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I^2 - IP - PI + P^2$$

Karena $P^2 = P$ dan I adalah identitas, maka:

$$(I - P)^2 = I - P - P + P = I - P$$

Terbukti bahwa $I - P$ adalah proyeksi. Dalam hal ini, $I - P$ adalah proyeksi ke $\text{ker}(P)$ sepanjang $\text{im}(P)$.

3.3.3 Soal Latihan Section 3.3

1. Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah operator linear. Diberikan basis $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ dan $\gamma = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Jika $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan $[T]_\gamma$.
2. Buktikan bahwa hubungan keserupaan matriks merupakan relasi ekuivalen (memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif).
3. Misalkan $P : V \rightarrow V$ adalah proyeksi. Buktikan bahwa $\text{rank}(P) = \text{tr}(P)$.
4. Jika P_1 dan P_2 adalah proyeksi yang memenuhi $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$, buktikan bahwa $P_1 + P_2$ juga merupakan proyeksi.

3.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 3

Bagian ini berisi persoalan transformasi linear yang menggabungkan konsep dimensi, struktur aljabar operator, dan sifat-sifat matriks representasi.

Problem 3.1. Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n dan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear. Buktikan bahwa $\text{ker}(T^n) = \text{ker}(T^{n+1})$ dan $\text{im}(T^n) = \text{im}(T^{n+1})$.

Problem 3.2. Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi hingga dan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear sedemikian sehingga $\text{rank}(T^2) = \text{rank}(T)$. Buktikan bahwa $\text{ker}(T) \cap \text{im}(T) = \{0\}$.

Problem 3.3. Diberikan operator linear $T : V \rightarrow V$. Jika terdapat polinomial $p(x)$ sedemikian sehingga $p(T) = 0$ dan $p(0) \neq 0$, buktikan bahwa T adalah operator yang invertibel.

Problem 3.4. Misalkan $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Buktikan bahwa matriks blok

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

adalah serupa. Gunakan hasil ini untuk menunjukkan bahwa AB dan BA memiliki karakteristik yang serupa (misalnya memiliki trace dan nilai eigen yang sama).

Problem 3.5. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ dan $f, g : V \rightarrow \mathbb{F}$ adalah dua fungsional linear (transformasi linear ke lapangan skalar). Buktikan bahwa jika $\ker(f) = \ker(g)$, maka terdapat skalar $c \in \mathbb{F}$ sehingga $g = cf$.

Problem 3.6. Misalkan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear berdimensi n . Buktikan bahwa T dapat dinyatakan sebagai $T = S + U$, di mana S adalah operator yang dapat didiagonalisasi dan U adalah operator nilpoten yang saling komut ($SU = US$). (Catatan: Ini dikenal sebagai dekomposisi Jordan-Chevalley).

Problem 3.7. Misalkan $P_1, P_2, \dots, P_k$ adalah operator proyeksi pada V sedemikian sehingga $P_1 + P_2 + \dots + P_k = I$. Buktikan bahwa jika $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$, maka $P_i P_j = 0$ untuk setiap $i \neq j$ (proyeksi-proyeksi tersebut saling ortogonal secara aljabar).

Bab 4

Nilai dan Vektor Karakteristik

4.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dalam analisis operator linear, kita sering mencari vektor khusus yang ketika ditransformasikan, hasilnya hanyalah kelipatan skalar dari vektor itu sendiri. Konsep ini mempermudah pemahaman struktur geometris dari transformasi tersebut.

4.1.1 Definisi Dasar

Definisi 4.1. Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ dan $T : V \rightarrow V$ adalah operator linear. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ disebut **nilai eigen** dari T jika terdapat vektor non-nol $v \in V$ sedemikian sehingga:

$$T(v) = \lambda v$$

Vektor v tersebut disebut sebagai **vektor eigen** yang bersesuaian dengan λ .

Untuk matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, nilai eigen adalah skalar λ yang memenuhi persamaan matriks $Av = \lambda v$.

4.1.2 Polinom Karakteristik

Nilai eigen λ dari matriks A adalah solusi dari persamaan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Fungsi $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ disebut sebagai **polinom karakteristik** dari A . Jika A berukuran $n \times n$, maka $f(\lambda)$ adalah polinom berderajat n .

Proposisi 4.2.

1. Himpunan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ , ditambah dengan vektor nol, membentuk subruang yang disebut **ruang eigen** $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$.
2. Jumlah dari semua nilai eigen (dengan multiplisitasnya) sama dengan trace matriks: $\sum \lambda_i = \text{tr}(A)$.

3. Hasil kali dari semua nilai eigen sama dengan determinan matriks: $\prod \lambda_i = \det(A)$.

Contoh 4.1. Tentukan nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solusi: Persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Maka nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$.

4.1.3 Soal Latihan Section 4.1

1. Carilah nilai eigen dan basis untuk setiap ruang eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Buktikan bahwa jika λ adalah nilai eigen dari matriks A yang invertibel, maka $1/\lambda$ adalah nilai eigen dari A^{-1} .
3. Tunjukkan bahwa matriks A dan A^T memiliki nilai eigen yang sama.
4. Misalkan λ adalah nilai eigen dari A . Buktikan bahwa λ^k adalah nilai eigen dari A^k untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

4.2 Diagonalisasi

Sebuah matriks persegi dikatakan dapat didiagonalisasi jika matriks tersebut serupa dengan matriks diagonal. Secara geometris, ini berarti terdapat basis yang terdiri sepenuhnya dari vektor-vektor eigen.

4.2.1 Definisi dan Syarat Diagonalisasi

Definisi 4.3. Matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ dikatakan **dapat didiagonalisasi** (diagonalizable) jika terdapat matriks invertibel P dan matriks diagonal D sedemikian sehingga:

$$P^{-1}AP = D$$

Dalam hal ini, kolom-kolom dari P adalah vektor-vektor eigen dari A , dan elemen diagonal dari D adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian.

Teorema 4.4. Matriks A berukuran $n \times n$ dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

4.2.2 Multiplisitas Aljabar dan Geometris

Untuk memahami kapan sebuah matriks dapat didiagonalisasi, kita perlu membedakan dua jenis multiplisitas:

1. **Multiplisitas Aljabar (m_λ):** Banyaknya kemunculan λ sebagai akar dari polinom karakteristik.
2. **Multiplisitas Geometris (g_λ):** Dimensi dari ruang eigen E_λ , yakni $\dim(\ker(A - \lambda I))$.

Teorema 4.5. Matriks A dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika untuk setiap nilai eigen λ , berlaku $g_\lambda = m_\lambda$.

Contoh 4.2. Periksalah apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dapat didiagonalisasi.

Solusi: Polinom karakteristiknya adalah $(1 - \lambda)^2 = 0$, sehingga $\lambda = 1$ dengan $m_1 = 2$. Untuk mencari ruang eigen E_1 , kita selesaikan $(A - I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies y = 0$$

Vektor eigen berbentuk $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Maka $g_1 = \dim(E_1) = 1$. Karena $g_1 < m_1$ ($1 < 2$), matriks A tidak dapat didiagonalisasi.

4.2.3 Soal Latihan Section 4.2

1. Misalkan $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks P dan D sehingga $P^{-1}AP = D$.
2. Buktikan bahwa jika matriks A berukuran $n \times n$ memiliki n nilai eigen yang berbeda, maka A pasti dapat didiagonalisasi.
3. Jika A dapat didiagonalisasi, buktikan bahwa $A^k = PD^kP^{-1}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
4. Misalkan A dapat didiagonalisasi dan hanya memiliki nilai eigen 0 atau 1. Buktikan bahwa $A^2 = A$ (matriks proyeksi).

4.3 Teorema Cayley-Hamilton

Teorema Cayley-Hamilton memberikan hubungan fundamental antara matriks dengan polinom karakteristiknya. Teorema ini sangat berguna untuk menghitung pangkat tinggi dari suatu matriks maupun mencari invers tanpa melalui metode adjoin atau eliminasi Gauss.

4.3.1 Pernyataan Teorema

Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ dan letakkan $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ sebagai polinom karakteristik dari A , yang secara umum berbentuk:

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

Teorema 4.6 (Cayley-Hamilton). *Setiap matriks persegi A memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri, yaitu:*

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0$$

4.3.2 Aplikasi Teorema

1. **Menghitung Invers:** Jika A invertibel, maka $c_0 = \det(A) \neq 0$. Dari persamaan $p(A) = 0$, kita dapat mengisolasi I dan mengalikan dengan A^{-1} untuk mendapatkan formula A^{-1} dalam bentuk jumlahan pangkat-pangkat A .
2. **Reduksi Pangkat:** Setiap pangkat A^m dengan $m \geq n$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

Contoh 4.3. Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tunjukkan berlakunya teorema Cayley-Hamilton dan gunakan untuk mencari A^{-1} .

Solusi: Polinom karakteristik: $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$. Menurut teorema: $A^2 - 5A - 2I = 0$. Untuk mencari invers, kalikan kedua ruas dengan A^{-1} :

$$\begin{aligned} A - 5I - 2A^{-1} &= 0 \implies 2A^{-1} = A - 5I \\ A^{-1} &= \frac{1}{2}(A - 5I) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.3 Soal Latihan Section 4.3

1. Gunakan Teorema Cayley-Hamilton untuk menghitung A^{100} jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(Petunjuk: Cari sisa pembagian polinomial x^{100} oleh polinomial karakteristik $p(x)$, yaitu $x^{100} = q(x)p(x) + (ax + b)$).
2. Misalkan $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ memiliki polinom karakteristik $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 1$. Nyatakan A^4 sebagai kombinasi linear dari $\{I, A, A^2\}$.
3. Buktikan bahwa untuk matriks 2×2 , persamaan

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0$$

selalu terpenuhi.

4. Jika A adalah matriks nilpoten dengan $A^k = 0$, tunjukkan menggunakan Teorema Cayley-Hamilton bahwa $A^n = 0$ di mana n adalah ukuran matriks.

4.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 4

Bagian ini berisi persoalan mengenai nilai karakteristik dan struktur polinomial matriks yang memerlukan analisis mendalam, setara dengan tingkat kompetisi mahasiswa nasional dan internasional.

Problem 4.1. Misalkan $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Buktikan bahwa AB dan BA memiliki polinom karakteristik yang sama. Apakah ini berarti AB dan BA selalu serupa? Berikan penjelasan atau contoh penyangkal.

Problem 4.2. Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ adalah matriks sedemikian sehingga $\text{tr}(A^k) = 0$ untuk semua $k = 1, 2, \dots, n$. Buktikan bahwa A adalah matriks nilpoten (yakni $A^n = 0$).

Problem 4.3. Diberikan matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dengan $\det(A) > 0$. Jika $A^2 + I = 0$, buktikan bahwa n haruslah kelipatan 4 atau tunjukkan syarat lain yang berkaitan dengan nilai eigen kompleksnya.

Problem 4.4. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Jika $p(x)$ adalah sebarang polinomial, buktikan bahwa nilai eigen dari matriks $p(A)$ adalah $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)$.

Problem 4.5. Misalkan $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $AB - BA = A$. Buktikan bahwa 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari A . (Petunjuk: Gunakan sifat trace pada A^k).

Problem 4.6. Gunakan Teorema Cayley-Hamilton untuk membuktikan bahwa jika $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, maka matriks e^A (eksponensial matriks) dapat dinyatakan sebagai polinomial dalam A dengan derajat maksimal $n - 1$.

Problem 4.7. Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $A^3 = A$. Buktikan bahwa A dapat didiagonalisasi. Apakah pernyataan ini tetap benar jika kita mengganti syaratnya menjadi $A^2 = 0$?

Bab 5

Ruang Hasil Kali Dalam

5.1 Norma dan Keortogonalan

Ruang hasil kali dalam memberikan struktur tambahan pada ruang vektor yang memungkinkan kita mendefinisikan konsep jarak dan sudut, mirip dengan geometri Euklidian di $\mathbb{R}^n$.

5.1.1 Hasil Kali Dalam

Definisi 5.1. Hasil kali dalam pada ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ adalah fungsi yang memetakan setiap pasangan vektor (u, v) ke skalar $\langle u, v \rangle \in \mathbb{F}$ yang memenuhi:

1. **Positivitas:** $\langle v, v \rangle \geq 0$, dan $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$.
2. **Linearitas pada komponen pertama:** $\langle au + v, w \rangle = a\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
3. **Simetri Konjugat:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

5.1.2 Norma dan Jarak

Definisi 5.2. Norma (panjang) dari vektor v didefinisikan sebagai $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Proposisi 5.3 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz). Untuk setiap $u, v \in V$, berlaku:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika u dan v bergantung linear.

5.1.3 Keortogonalan

Definisi 5.4. Dua vektor u dan v dikatakan **ortogonal** jika $\langle u, v \rangle = 0$. Jika $\|u\| = \|v\| = 1$ dan keduanya ortogonal, maka mereka disebut **ortonormal**.

Teorema 5.5 (Pythagoras). Jika u dan v adalah vektor-vektor ortogonal, maka:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

5.1.4 Soal Latihan Section 5.1

1. Misalkan $V = C[0, 1]$ dengan hasil kali dalam $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Hitunglah norma dari fungsi $f(x) = x^2$.
2. Buktikan **Identitas Jajaran Genjang**: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
3. Misalkan u, v adalah vektor di ruang hasil kali dalam real. Buktikan bahwa u dan v ortogonal jika dan hanya jika $\|u + v\| = \|u - v\|$.
4. Gunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz untuk membuktikan bahwa jika $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan real positif, maka:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

5.2 Proses Gram-Schmidt

Dalam ruang hasil kali dalam, bekerja dengan basis ortonormal jauh lebih efisien dibandingkan basis biasa karena koordinat vektor dapat dicari dengan proyeksi langsung tanpa perlu menyelesaikan sistem persamaan linear yang rumit.

5.2.1 Proyeksi Ortogonal

Sebelum masuk ke algoritma, kita definisikan proyeksi ortogonal sebuah vektor v ke vektor u :

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

Vektor ini adalah komponen dari v yang sejajar dengan u .

5.2.2 Algoritma Gram-Schmidt

Misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis untuk subruang W . Kita dapat membangun basis ortogonal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ melalui langkah-langkah berikut:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan basis **ortonormal** $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, kita cukup menormalisasi setiap vektor: $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.

5.2.3 Dekomposisi QR

Sebagai konsekuensi dari proses Gram-Schmidt, setiap matriks A dengan kolom-kolom yang bebas linear dapat difaktorkan menjadi:

$$A = QR$$

di mana Q adalah matriks dengan kolom-kolom ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas yang invertibel.

Contoh 5.1. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mengubah basis $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ menjadi basis ortogonal $\{u_1, u_2, u_3\}$, di mana:

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1)$$

Solusi:

1. Mencari u_1

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 0)$$

$$\text{Maka } \|u_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2.$$

2. Mencari u_2

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\text{Hitung } \langle v_2, u_1 \rangle = (1)(1) + (0)(1) + (1)(0) = 1.$$

$$u_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (1/2, -1/2, 1)$$

$$\text{Maka } \|u_2\|^2 = (1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2 = 3/2.$$

3. Mencari u_3

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

Hitung komponen-komponennya:

- $\langle v_3, u_1 \rangle = (0)(1) + (1)(1) + (1)(0) = 1.$
- $\langle v_3, u_2 \rangle = (0)(1/2) + (1)(-1/2) + (1)(1) = 1/2.$

Substitusikan:

$$u_3 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1/2}{3/2}(1/2, -1/2, 1)$$

$$u_3 = (-1/2, 1/2, 1) - (1/6, -1/6, 1/3) = (-2/3, 2/3, 2/3)$$

Hasil Akhir: Basis ortogonalnya adalah $\{(1, 1, 0), (1/2, -1/2, 1), (-2/3, 2/3, 2/3)\}.$

5.2.4 Soal Latihan Section 5.2

1. Misalkan $P_2(\mathbb{R})$ memiliki hasil kali dalam $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$. Gunakan proses Gram-Schmidt pada basis $\{1, x, x^2\}$ untuk mencari dua polinom ortogonal pertama (Polinom Legendre).
2. Buktikan bahwa jika $\{u_1, \dots, u_k\}$ adalah himpunan vektor ortogonal non-nol, maka himpunan tersebut pasti bebas linear.
3. Misalkan W adalah subruang yang direntang oleh $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Tentukan proyeksi ortogonal dari vektor $v = (1, 2, 3)$ ke subruang W .
4. Tunjukkan bahwa matriks Q dalam dekomposisi QR memenuhi $Q^T Q = I$.

5.3 Komplemen Ortogonal

Konsep komplemen ortogonal memungkinkan kita untuk memahami hubungan antara subruang dengan seluruh ruang vektor melalui perspektif keortogonalan.

5.3.1 Definisi Komplemen Ortogonal

Definisi 5.6. Misalkan W adalah subruang dari ruang hasil kali dalam V . Komplemen ortogonal dari W , dinotasikan dengan $W^\perp$ (dibaca "W perp"), adalah himpunan semua vektor di V yang ortogonal terhadap setiap vektor di W :

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ untuk semua } w \in W\}$$

Proposisi 5.7. 1. $W^\perp$ adalah subruang dari V .

2. $W \cap W^\perp = \{0\}$.
3. $(W^\perp)^\perp = W$ jika V berdimensi hingga.

5.3.2 Dekomposisi Ortogonal

Salah satu hasil terpenting dalam ruang hasil kali dalam adalah bahwa setiap vektor dapat dipisahkan secara unik menjadi komponen yang berada di dalam subruang dan komponen yang tegak lurus terhadap subruang tersebut.

Teorema 5.8. Jika W adalah subruang berdimensi hingga dari V , maka setiap $v \in V$ dapat ditulis secara unik sebagai:

$$v = w + w^\perp$$

di mana $w \in W$ dan $w^\perp \in W^\perp$. Hal ini berarti $V = W \oplus W^\perp$.

5.3.3 Hubungan dengan Ruang Matriks

Untuk sebuah matriks $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, terdapat hubungan fundamental antara empat subruang dasar:

- $(\text{Row } A)^\perp = \ker(A)$
- $(\text{Col } A)^\perp = \ker(A^T)$

Contoh 5.2. Misalkan W adalah bidang di $\mathbb{R}^3$ yang didefinisikan oleh persamaan $x - 2y + z = 0$. Tentukan basis untuk $W^\perp$.

Solusi: Vektor (x, y, z) berada di W jika memenuhi hasil kali titik dengan $(1, -2, 1)$ adalah nol. Artinya, W adalah ruang yang tegak lurus terhadap vektor $n = (1, -2, 1)$. Karena $W^\perp$ berisi semua vektor yang tegak lurus terhadap W , maka $W^\perp$ haruslah garis yang direntang oleh vektor normal bidang tersebut. Jadi, basis untuk $W^\perp$ adalah $\{(1, -2, 1)\}$.

5.3.4 Soal Latihan Section 5.3

1. Misalkan $W = \text{span}\{(1, 2, 1)\}$. Tentukan persamaan sistem linear yang mendefinisikan subruang $W^\perp$ di $\mathbb{R}^3$.
2. Buktikan bahwa jika $V = W \oplus W^\perp$, maka $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$.
3. Misalkan A adalah matriks $m \times n$. Buktikan bahwa $\ker(A^T A) = \ker(A)$.
4. Tunjukkan bahwa untuk setiap subruang U dan W , berlaku $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

5.4 Soal Latihan Pengayaan Bab 5

Bagian ini menyajikan persoalan yang melibatkan teknik pembuktian tingkat lanjut dalam ruang hasil kali dalam, termasuk penggunaan ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan sifat-sifat operator adjung.

Problem 5.1. Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam. Buktikan *Polarization Identity* untuk ruang vektor real:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

dan jelaskan bagaimana norma dapat sepenuhnya menentukan hasil kali dalam pada ruang tersebut.

Problem 5.2. Misalkan $V = C[0, 1]$ adalah ruang fungsi kontinu pada interval $[0, 1]$ dengan hasil kali dalam $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Misalkan W adalah subruang yang berisi semua polinom dengan derajat maksimal n . Buktikan bahwa untuk sebarang $f \in V$, terdapat polinom $p \in W$ yang unik sedemikian sehingga $\|f - p\|$ minimum. (Konsep ini merupakan dasar dari *Best Approximation Theory*).

Problem 5.3. Misalkan u, v, w adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam sedemikian sehingga $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$ dan $u + v + w = \mathbf{0}$. Hitunglah nilai dari $\langle u, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, u \rangle$.

Problem 5.4. Diberikan matriks $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Buktikan bahwa $\mathbb{R}^n = \text{im}(A^T) \oplus \text{ker}(A)$. Gunakan hasil ini untuk menunjukkan bahwa sistem linear $Ax = b$ memiliki solusi jika dan hanya jika b ortogonal terhadap setiap solusi dari $A^T y = 0$.

Problem 5.5. Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam berdimensi hingga. Sebuah operator $T : V \rightarrow V$ disebut *self-adjoint* jika $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$ untuk semua $u, v \in V$. Buktikan bahwa jika T adalah *self-adjoint*, maka semua nilai eigen dari T adalah bilangan real.

Problem 5.6. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Buktikan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz bahwa:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i + 1} \geq \frac{1}{n + 1}$$

Problem 5.7. Misalkan W adalah subruang dari V . Buktikan bahwa P adalah proyeksi ortogonal ke arah W jika dan hanya jika $P^2 = P$ dan P adalah *self-adjoint*.

Bab 6

Latihan Akhir

Bagian ini berisi kumpulan soal yang mencakup seluruh materi dari Bab 1 sampai Bab 5.

6.1 Bagian I: Isian Singkat

1. Jika A adalah matriks 3×3 dengan $\det(A) = 5$, maka $\det(2A^{-1})$ adalah ...
2. Dimensi dari subruang di $\mathbb{R}^4$ yang dibangun oleh $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0)\}$ adalah ...
3. Jika $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah rotasi sebesar 90° berlawanan arah jarum jam, maka matriks representasi T terhadap basis standar adalah ...
4. Banyaknya solusi dari sistem persamaan linear homogen dengan 5 variabel dan rank matriks 3 adalah ...
5. Jika $\lambda = 2$ adalah nilai eigen dari A , maka nilai eigen dari $A^3 - 2I$ adalah ...
6. Trace dari matriks proyeksi P yang memetakan $\mathbb{R}^3$ ke sebuah bidang (dimensi 2) adalah ...
7. Jika $u = (1, 2, 2)$ dan $v = (2, 1, -2)$, maka hasil kali dalam standar $\langle u, v \rangle$ adalah ...
8. Polinom karakteristik dari matriks identitas $I_{n \times n}$ adalah ...
9. Jarak antara vektor $u = (1, 1)$ dan $v = (4, 5)$ dalam norma Euklidian adalah ...
10. Jika A serupa dengan B dan $\det(A) = 10$, maka $\det(B) = \dots$
11. Matriks A disebut nilpoten jika terdapat k sehingga $A^k = 0$. Nilai eigen yang mungkin bagi matriks nilpoten adalah ...
12. Jika $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis ortonormal, maka $\|v_1 + v_2 + v_3\| = \dots$

13. Komplemen ortogonal dari subruang nol $\{0\}$ di dalam V adalah ...
14. Matriks A berukuran $n \times n$ dapat dibalik jika dan hanya jika $\text{rank}(A) = \dots$
15. Jika $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ adalah polinom karakteristik A , maka $A^2 - 3A = \dots$
16. Nilai maksimum dari $|\langle u, v \rangle|$ jika $\|u\| = 3$ dan $\|v\| = 4$ adalah ...
17. Basis untuk ruang baris matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah ...
18. Jika T adalah transformasi linear sedemikian sehingga $\ker(T) = V$, maka T adalah ...
19. Multiplisitas aljabar dari nilai eigen $\lambda = 0$ pada matriks dengan rank r dan ukuran $n \times n$ minimal bernilai ...
20. Dalam $\mathbb{R}^2$, vektor yang ortogonal terhadap $(3, -4)$ dan memiliki panjang 1 adalah ...

6.2 Bagian II: Esai

Problem 6.1. Misalkan A dan B adalah matriks $n \times n$ sedemikian sehingga $AB = 0$. Buktikan bahwa $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$.

Problem 6.2. Buktikan bahwa jika $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^T = A$ (matriks simetris), maka semua nilai eigen dari A adalah bilangan real.

Problem 6.3. Diberikan transformasi linear $T : V \rightarrow V$ dengan $\dim(V) = n$. Jika $T^2 = 0$, buktikan bahwa $\text{im}(T) \subseteq \ker(T)$ dan simpulkan bahwa $\text{rank}(T) \leq n/2$.

Problem 6.4. Tunjukkan bahwa jika $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ adalah dua matriks yang serupa, maka mereka memiliki minimal polinomial yang sama.

Problem 6.5. Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam dan $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ adalah basis ortonormal. Buktikan bahwa untuk setiap $v \in V$, berlaku:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$

(Identitas Parseval).

Problem 6.6. Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dengan entri real. Jika $A^k = I$ untuk suatu bilangan bulat positif k , buktikan bahwa A dapat didiagonalisasi atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$.

Problem 6.7. Tentukan semua nilai eigen dan vektor eigen dari operator turunan $D : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh $D(p) = p'$. Apakah operator ini dapat didiagonalisasi? Jelaskan.

Problem 6.8. Buktikan bahwa jika $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle$ untuk semua $x \in V$, maka $u = v$.

Problem 6.9. Misalkan $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dengan $\text{rank}(A) = 1$. Buktikan bahwa A serupa dengan matriks diagonal jika dan hanya jika $\text{tr}(A) \neq 0$.

Problem 6.10. Gunakan Teorema Cayley-Hamilton untuk membuktikan bahwa jika A nilpoten, maka $A^n = 0$, di mana n adalah ukuran matriks tersebut.

Bibliografi

- [1] Howard Anton & Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, 2014.
- [2] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.
- [3] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Pearson, 2018.
- [4] Kenneth Hoffman & Ray Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971.