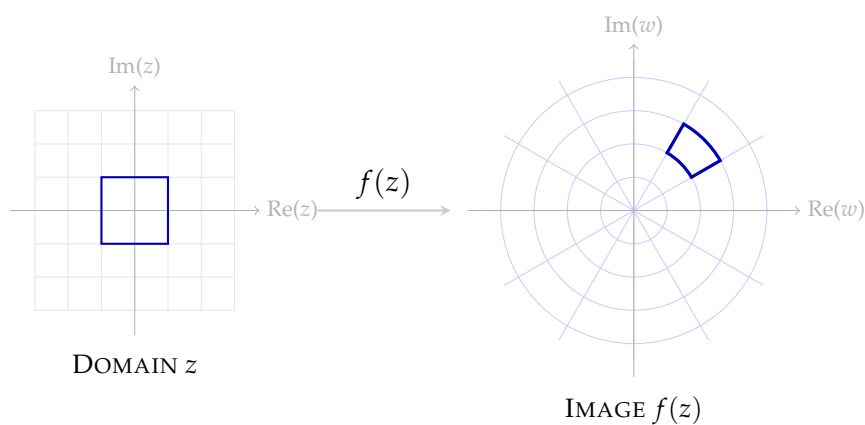

MODUL PELATIHAN ONMIPA 2026

ANALISIS KOMPLEKS

Teori Fungsi Variabel Kompleks: Residu, Kontur, dan Pemetaan



Disusun Oleh:
Filza Buana Putra
2026

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas terselesainya penyusunan **Modul Pelatihan ONMIPA 2026: Analisis Kompleks** ini. Modul ini disusun dengan tujuan utama untuk memberikan panduan belajar yang terstruktur bagi para mahasiswa maupun peminat matematika yang ingin memperdalam pemahaman mereka di bidang analisis kompleks.

Analisis kompleks bukan sekadar perluasan kalkulus real ke bidang imajiner, melainkan sebuah disiplin ilmu yang memiliki keanggunan struktur dan ketajaman teoretis yang luar biasa. Oleh karena itu, modul ini dirancang untuk menyeimbangkan antara teknik komputasi integral yang efisien dengan pemahaman konsep topologi dan analitis yang mendalam.

Secara garis besar, modul ini mencakup:

- Fondasi sistem bilangan kompleks, geometri bidang kompleks, dan fungsi dasar.
- Konsep limit, turunan kompleks, serta syarat perlu dan cukup analitis melalui Persamaan Cauchy-Riemann.
- Teknik pengintegralan kompleks, mulai dari Teorema Cauchy-Goursat hingga Rumus Integral Cauchy.
- Representasi fungsi dalam deret Taylor dan Laurent, serta klasifikasi singularitas.
- Aplikasi Teorema Residu, Teorema Liouville, dan Teorema Rouché yang menjadi senjata utama dalam pemecahan masalah tingkat lanjut.

Modul ini juga dilengkapi dengan soal-soal latihan yang bervariasi, mulai dari tingkat dasar hingga pengayaan setara kompetisi nasional (ONMIPA), guna mengasah ketajaman logika dan kemampuan analisis pembaca.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan di masa mendatang. Akhir kata, semoga modul ini dapat memberikan manfaat yang nyata bagi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam penguasaan bidang analisis kompleks.

Pontianak, Maret 2026

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
1 Sistem Bilangan Kompleks dan Geometri Bidang Kompleks	1
1.1 Definisi Bilangan Kompleks dan Operasi Aljabar	1
1.2 Bentuk Polar, Eksponensial, dan Teorema De Moivre	2
1.3 Interpretasi Geometri: Garis, Lingkaran, dan Ketaksamaan Segitiga	3
1.4 Topologi Dasar pada Bidang Kompleks	4
1.5 Latihan Soal Bab 1	5
2 Fungsi Kompleks dan Transformasi Elementer	6
2.1 Konsep Fungsi Variabel Kompleks, Domain, dan Range	6
2.2 Pemetaan oleh Fungsi Elementer	7
2.3 Fungsi Eksponensial, Logaritma Kompleks, dan Trigonometri . . .	8
2.4 Latihan Akhir Bab 2	10
3 Limit, Turunan, dan Fungsi Analitik	11
3.1 Limit dan Kontinuitas Fungsi Kompleks	11
3.2 Definisi Turunan Kompleks (<i>Derivative</i>)	12
3.3 Persamaan Cauchy-Riemann	13
3.4 Fungsi Harmonik dan Harmonik Konjugat	14
3.5 Latihan Akhir Bab 3	16
4 Pengintegralan Kompleks	18
4.1 Lintasan (Contour) di Bidang Kompleks	18
4.2 Integral Garis Kompleks	19
4.3 Teorema Cauchy-Goursat	20
4.4 Rumus Integral Cauchy	21
4.5 Latihan Akhir Bab 4	23
5 Deret Taylor, Laurent, dan Teorema Residu	24
5.1 Deret Taylor dan Deret Laurent	24
5.2 Klasifikasi Singularitas dan Residu	25
5.3 Teorema Residu Cauchy	26
5.4 Latihan Akhir Bab 5	28

6	Extra: Teorema Liouville dan Teorema Rouché	29
6.1	Teorema Liouville	29
6.2	Teorema Rouché	29
7	Simulasi Pengayaan ONMIPA	31
7.1	Bagian I: Isian Singkat	31
7.2	Bagian II: Uraian (Essay)	32

Bab 1

Sistem Bilangan Kompleks dan Geometri Bidang Kompleks

1.1 Definisi Bilangan Kompleks dan Operasi Aljabar

Definisi 1.1. Bilangan kompleks adalah angka dalam bentuk $z = x + iy$, dengan x dan y adalah bilangan real, serta i adalah unit imajiner yang memenuhi persamaan $i^2 = -1$. Himpunan semua bilangan kompleks dilambangkan dengan $\mathbb{C}$.

- $x = \text{Re}(z)$ disebut bagian real dari z .
- $y = \text{Im}(z)$ disebut bagian imajiner dari z .

Definisi 1.2. Diberikan dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ and $z_2 = x_2 + iy_2$. Operasi dasar pada $\mathbb{C}$ didefinisikan sebagai berikut:

1. **Penjumlahan:** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2. **Perkalian:** $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
3. **Konjugat:** $\bar{z} = x - iy$.
4. **Modulus:** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Contoh 1.1. Tentukan hasil dari $\frac{1+2i}{3-4i}$ dalam bentuk $x + iy$.

Penyelesaian. Kalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat dari penyebut:

$$\frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{3^2+4^2} = \frac{3+10i-8}{9+16} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Jadi, $\text{Re}(z) = -1/5$ dan $\text{Im}(z) = 2/5$. □

Latihan Soal

1. Buktikan bahwa $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
2. Tentukan semua bilangan kompleks z yang memenuhi persamaan $z^2 = \bar{z}$.

1.2 Bentuk Polar, Eksponensial, dan Teorema De Moivre

Definisi 1.3. Setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dinyatakan dalam koordinat polar (r, θ) , dengan $r = |z|$ dan $\theta = \arctan(y/x)$.

1. **Bentuk Polar:** $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

2. **Bentuk Eksponensial:** $z = re^{i\theta}$ (menggunakan Identitas Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$).

Sudut θ disebut argumen dari z ($\arg z$). Nilai utama argumen, dilambangkan $\text{Arg} z$, berada pada rentang $(-\pi, \pi]$.

Teorema 1.4 (Teorema De Moivre). Untuk setiap bilangan kompleks $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ dan bilangan bulat n , berlaku:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Secara umum, dalam bentuk eksponensial: $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

Contoh 1.2. Hitung nilai dari $(1 + i)^{10}$.

Penyelesaian. Ubah $z = 1 + i$ ke bentuk polar. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $\theta = \arctan(1/1) = \pi/4$. Maka, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Menggunakan Teorema De Moivre:

$$z^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{i(10\pi/4)} = 2^5 e^{i(5\pi/2)} = 32 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = 32(0 + i) = 32i.$$

□

Problem 1.1. Tentukan semua solusi dari persamaan $z^n = 1$ untuk $n \in \mathbb{N}$. (Akar-akar unitas).

Problem 1.2. Hitung nilai dari $\frac{(\cos \theta - i \sin \theta)^4}{(\sin \theta + i \cos \theta)^5}$.

Problem 1.3. Buktikan bahwa jika $|z| = 1$, maka $\text{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 0$ untuk $z \neq 1$.

Problem 1.4. Gunakan Teorema De Moivre untuk menyatakan $\cos 3\theta$ dalam suku-suku $\cos \theta$.

Problem 1.5. Tentukan nilai dari sumasi berikut:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

Petunjuk: Gunakan identitas $e^{ik\theta}$ dan Teorema Binomial.

1.3 Interpretasi Geometri: Garis, Lingkaran, dan Ketaksamaan Segitiga

Teorema 1.5 (Ketaksamaan Segitiga). Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, berlaku:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Kesamaan $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ terjadi jika dan hanya jika z_1 dan z_2 berada pada sinar yang sama dari titik asal (kolinear).

Definisi 1.6 (Persamaan Garis dan Lingkaran). Diberikan $a, b \in \mathbb{C}$ dan $R \in \mathbb{R}$:

1. **Lingkaran:** Persamaan $|z - a| = R$ merepresentasikan lingkaran dengan pusat a dan jari-jari R .
2. **Garis Lurus:** Persamaan $|z - a| = |z - b|$ merepresentasikan garis bagi tegak lurus (perpendicular bisector) dari ruas garis yang menghubungkan titik a dan b .
3. **Bentuk Umum Garis:** $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$, dengan $\beta \in \mathbb{R}$.

Contoh 1.3. Gambarkan himpunan titik z yang memenuhi $|z - 2i| \leq |z + 2|$.

Penyelesaian. Persamaan $|z - 2i| = |z - (-2)|$ adalah garis yang membagi dua sama besar jarak antara titik $(0, 2)$ dan $(-2, 0)$. Garis ini adalah $y = -x$. Ketaksamaan $|z - 2i| \leq |z + 2|$ berarti daerah yang lebih dekat ke titik $2i$ (sumbu imajiner positif) dibandingkan ke -2 . Secara aljabar:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 2)^2 &\leq (x + 2)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &\leq x^2 + 4x + 4 + y^2 \\ -4y &\leq 4x \implies y \geq -x \end{aligned}$$

Himpunan tersebut adalah setengah bidang di atas garis $y = -x$. □

Problem 1.6. Misalkan z_1, z_2, z_3 adalah titik-titik pada lingkaran satuan $|z| = 1$ sedemikian sehingga $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Buktikan bahwa z_1, z_2, z_3 membentuk segitiga sama sisi.

Problem 1.7. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $|z - 3 + 4i|$ jika diketahui $|z| \leq 1$.

Problem 1.8. Buktikan identitas jajar genjang:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

dan berikan interpretasi geometrinya.

Problem 1.9. Diberikan persamaan $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, dengan $2a > |z_1 - z_2|$. Jelaskan secara geometris bentuk kurva yang dihasilkan dan tentukan titik-titik fokusnya.

Problem 1.10. Jika $w = \frac{z-1}{z+1}$ dan $\operatorname{Re}(w) = 0$, tentukan tempat kedudukan (locus) dari titik z .

1.4 Topologi Dasar pada Bidang Kompleks

Definisi 1.7 (Lingkungan-epsilon). *Lingkungan- ϵ (atau disk terbuka) dari titik z_0 adalah himpunan semua titik z yang memenuhi:*

$$N(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

Lingkungan yang dikeluarkan (deleted neighborhood) didefinisikan sebagai $0 < |z - z_0| < \epsilon$.

Definisi 1.8 (Titik Interior, Eksterior, dan Batas). *Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$ dan titik z_0 :*

1. z_0 adalah **titik interior** S jika terdapat lingkungan $N(z_0, \epsilon)$ yang seluruhnya berada di dalam S .
2. z_0 adalah **titik eksterior** S jika terdapat lingkungan $N(z_0, \epsilon)$ yang seluruhnya berada di luar S .
3. z_0 adalah **titik batas** (boundary point) S jika setiap lingkungan $N(z_0, \epsilon)$ memuat setidaknya satu titik di dalam S dan setidaknya satu titik di luar S .

Definisi 1.9 (Himpunan Terbuka dan Tertutup).

- Himpunan S disebut **terbuka** jika setiap titik di S adalah titik interior.
- Himpunan S disebut **tertutup** jika S memuat seluruh titik batasnya.
- Komplemen dari himpunan terbuka adalah himpunan tertutup.

Definisi 1.10 (Keterhubungan dan Domain).

- Himpunan terbuka S disebut **terhubung** (connected) jika setiap dua titik di dalamnya dapat dihubungkan oleh garis patah-patah yang seluruhnya berada di S .
- Himpunan terbuka yang terhubung disebut sebagai **domain**.
- Domain beserta sebagian atau seluruh titik batasnya disebut sebagai **region**.

Contoh 1.4. Tentukan apakah himpunan $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 1\}$ merupakan himpunan terbuka, tertutup, atau bukan keduanya.

Penyelesaian. Ambil sebarang $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$, maka $y_0 > 1$. Pilih $\epsilon = y_0 - 1 > 0$. Untuk setiap $z \in N(z_0, \epsilon)$, berlaku $|z - z_0| < y_0 - 1$. Secara geometris, jarak vertikal z ke garis $y = 1$ selalu positif, sehingga $\text{Im}(z) > 1$. Karena setiap titik z_0 memiliki lingkungan yang berada di dalam S , maka S adalah himpunan terbuka. $\square$

1.5 Latihan Soal Bab 1

1. Buktikan bahwa jika $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ dan $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, maka salah satu dari z_1, z_2, z_3 harus bernilai 1.
2. Tentukan semua bilangan kompleks z yang memenuhi $|z| - z = 1 + 2i$.
3. Diberikan $z, w \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < 1$ dan $|w| < 1$. Buktikan bahwa:

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| < 1$$

4. Identifikasi dan gambarkan jenis himpunan (terbuka/tertutup, terhubung/tidak) dari $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| \leq 2\}$. Tentukan pula titik-titik batasnya.
5. Misalkan $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ adalah polinomial dengan koefisien real. Buktikan bahwa jika z_0 adalah akar dari $P(z)$, maka $\bar{z}_0$ juga merupakan akar dari $P(z)$.
6. Jika z_k adalah akar-akar dari persamaan $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$, buktikan bahwa:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - z_k} = \frac{n}{2}$$

7. Tentukan luas daerah di bidang kompleks yang dibatasi oleh ketaksamaan $|z - 1| \leq 1$ dan $|z - i| \leq 1$.

Bab 2

Fungsi Kompleks dan Transformasi Elementer

2.1 Konsep Fungsi Variabel Kompleks, Domain, dan Range

Definisi 2.1. Misalkan $S \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang menetapkan setiap bilangan kompleks $z \in S$ dengan tepat satu bilangan kompleks w . Hubungan ini ditulis sebagai:

$$w = f(z)$$

Himpunan S disebut sebagai **domain** dari f , dan himpunan semua nilai w yang dihasilkan disebut sebagai **range** dari f .

Definisi 2.2. Jika $z = x + iy$, maka fungsi kompleks $f(z)$ dapat diuraikan menjadi dua fungsi real $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sedemikian sehingga:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Di sini, $u(x, y)$ disebut sebagai bagian real dari f dan $v(x, y)$ disebut sebagai bagian imajiner dari f .

Contoh 2.1. Uraikan fungsi $f(z) = z^3$ ke dalam bentuk $u(x, y) + iv(x, y)$.

Penyelesaian. Substitusikan $z = x + iy$ ke dalam fungsi:

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^3 \\ &= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

Maka diperoleh $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ dan $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. □

Contoh 2.2. Tentukan nilai dari $f(1 + i)$ jika $f(z) = |z|^2 + \bar{z}$.

Penyelesaian. Substitusi langsung $z = 1 + i$:

$$\begin{aligned} f(1 + i) &= |1 + i|^2 + \overline{1 + i} \\ &= (1^2 + 1^2) + (1 - i) \\ &= 2 + 1 - i \\ &= 3 - i \end{aligned}$$

□

Latihan 2.1

1. Uraikan fungsi-fungsi berikut ke dalam bentuk $u(x, y) + iv(x, y)$:
 - (a) $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$)
 - (b) $f(z) = e^{z^2}$
2. Tentukan range dari fungsi $f(z) = \bar{z}$ jika domainnya adalah cakram satuan terbuka $|z| < 1$.
3. Misalkan $f(z) = z^2$. Gambarkan bayangan dari garis vertikal $x = c$ (dengan $c > 0$) pada bidang w .
4. Jika $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2xy + 2x)$, nyatakan fungsi tersebut dalam variabel z .
5. Buktikan bahwa untuk $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, titik-titik yang memenuhi $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ terletak pada lingkaran $|z| = 1$ (kecuali titik $z = 1$).

2.2 Pemetaan oleh Fungsi Elementer

Definisi 2.3. *Pemetaan (mapping) adalah cara untuk memvisualisasikan fungsi kompleks $w = f(z)$ dengan membandingkan perubahan bentuk atau posisi dari bidang- z ke bidang- w .*

Beberapa jenis pemetaan linear dan dasar meliputi:

1. **Translasi:** $w = z + a$, memindahkan setiap titik sejauh vektor a .
2. **Rotasi:** $w = e^{i\theta}z$, memutar titik sebesar sudut θ terhadap titik asal.
3. **Dilatasi:** $w = rz$ ($r \in \mathbb{R}, r > 0$), memperbesar atau memperkecil jarak titik dari asal.

Definisi 2.4 (Transformasi Bilinear / Mobius). *Transformasi yang didefinisikan oleh persamaan:*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

disebut sebagai transformasi Mobius. Transformasi ini memiliki sifat unik yaitu memetakan lingkaran dan garis lurus di bidang- z menjadi lingkaran atau garis lurus di bidang- w .

Contoh 2.3. Tentukan bayangan lingkaran $|z| = 1$ di bawah pemetaan $w = \frac{z-i}{z+i}$.

Penyelesaian. Kita dapat menyatakan z dalam w :

$$w(z+i) = z-i \implies wz + wi = z-i \implies z(w-1) = -i(w+1) \implies z = -i \frac{w+1}{w-1}$$

Karena $|z| = 1$, maka:

$$\left| -i \frac{w+1}{w-1} \right| = 1 \implies \frac{|w+1|}{|w-1|} = 1 \implies |w+1| = |w-1|$$

Persamaan $|w - (-1)| = |w - 1|$ menyatakan garis bagi tegak lurus antara titik -1 dan 1 pada bidang- w . Maka, bayangan lingkaran satuan tersebut adalah sumbu imajiner ($u = 0$). $\square$

Latihan 2.2

1. Tentukan fungsi linear $w = az + b$ yang memetakan titik $z = 0$ ke $w = i$ dan titik $z = 1$ ke $w = 1 + i$.
2. Misalkan $f(z) = 1/z$. Tentukan bayangan dari garis vertikal $x = 1/2$.
3. Tentukan bayangan dari setengah bidang atas $\text{Im}(z) > 0$ di bawah transformasi Mobius $w = \frac{z-i}{z+i}$.
4. Cari transformasi Mobius yang memetakan titik-titik $1, i, -1$ berturut-turut menjadi $i, 0, -i$.
5. Tunjukkan bahwa setiap transformasi Mobius dapat dinyatakan sebagai komposisi dari translasi, rotasi, dilatasi, dan inversi ($1/z$).
6. Tentukan titik tetap (fixed point) dari transformasi $w = \frac{z-1}{z+1}$. Titik tetap adalah titik yang memenuhi $f(z) = z$.
7. Buktikan bahwa pemetaan $w = z^2$ memetakan garis mendatar $y = c$ ($c \neq 0$) menjadi sebuah parabola di bidang- w .

2.3 Fungsi Eksponensial, Logaritma Kompleks, dan Trigonometri

Definisi 2.5 (Fungsi Eksponensial). Fungsi eksponensial kompleks didefinisikan sebagai:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Sifat-sifat utama:

1. $|e^z| = e^x$.
2. $\arg(e^z) = y + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. e^z bersifat periodik dengan periode $2\pi i$, yaitu $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Definisi 2.6 (Fungsi Logaritma). Logaritma kompleks $\log z$ untuk $z \neq 0$ didefinisikan sebagai invers dari fungsi eksponensial:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nilai utama logaritma, ditulis sebagai $\operatorname{Log} z$, diperoleh saat $k = 0$:

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

Definisi 2.7 (Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik). Fungsi sinus dan kosinus kompleks didefinisikan melalui identitas Euler:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Contoh 2.4. Tentukan semua nilai z yang memenuhi $e^z = -i$.

Penyelesaian. Kita tahu bahwa $-i = 1 \cdot e^{i(-\pi/2+2k\pi)}$. Karena $e^z = e^x e^{iy}$, maka:

$$\begin{aligned} e^x = 1 &\implies x = 0 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, &\quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Jadi, $z = i(2k\pi - \frac{\pi}{2})$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. □

Contoh 2.5. Hitung nilai dari $\operatorname{Log}(1 - i)$.

Penyelesaian. Untuk $z = 1 - i$:

- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
- $\operatorname{Arg} z = -\pi/4$ (berada di kuadran IV).

Maka, $\operatorname{Log}(1 - i) = \ln \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$. □

Latihan 2.3

1. Selesaikan persamaan $e^{2z-1} = 1$.
2. Tentukan nilai utama dari i^i . (Petunjuk: Gunakan definisi $z^c = e^{c \log z}$).
3. Buktikan bahwa $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.
4. Tentukan semua akar dari persamaan $\sin z = 2$. (Catatan: Dalam domain kompleks, nilai sinus bisa lebih dari 1).
5. Tunjukkan bahwa $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.
6. Buktikan identitas $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
7. Jika $z = x + iy$, buktikan bahwa $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

2.4 Latihan Akhir Bab 2

1. Tentukan bayangan dari cakram satuan $|z| \leq 1$ di bawah transformasi Mobius:

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

Gambarkan daerah tersebut pada bidang- w dan tentukan apakah pemetaan ini bersifat konformal pada seluruh domainnya.

2. Diketahui sebuah transformasi Mobius memetakan titik $1, i, -1$ berturut-turut ke $i, 1, 1$. Apakah transformasi tersebut eksis? Jika ya, tentukan persamaannya. Jika tidak, jelaskan alasannya dengan meninjau sifat ketunggalan transformasi Mobius.
3. Selesaikan persamaan kompleks berikut untuk z :

$$\cosh z = -2$$

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk $x + iy$.

4. Misalkan $f(z) = z^2$. Tentukan keluarga kurva di bidang- w yang merupakan hasil pemetaan dari garis-garis mendatar $y = c$ ($c \neq 0$) di bidang- z . Buktikan bahwa semua kurva tersebut memiliki titik fokus yang sama.
5. Tentukan semua nilai z yang memenuhi persamaan:

$$\sin z = \cosh 4$$

6. Tentukan nilai utama (principal value) dari:

$$(1 + i)^{1-i}$$

Nyatakan dalam bentuk eksponensial $re^{i\theta}$.

7. Buktikan bahwa fungsi logaritma kompleks memenuhi hubungan berikut:

$$\cos^{-1} z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right)$$

Gunakan identitas ini untuk mencari nilai dari $\cos^{-1}(2)$.

8. Sebuah pemetaan didefinisikan sebagai $w = \frac{1}{z}$. Tunjukkan bahwa lingkaran yang tidak melalui titik asal di bidang- z akan dipetakan menjadi lingkaran yang juga tidak melalui titik asal di bidang- w .
9. Cari semua bilangan kompleks z yang memenuhi $|e^{z^2}| = 1$ dan $|e^z| = e$.
10. Misalkan $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ adalah transformasi Mobius yang memetakan sumbu real ke sumbu real. Buktikan bahwa koefisien a, b, c, d dapat dipilih sedemikian sehingga semuanya merupakan bilangan real.

Bab 3

Limit, Turunan, dan Fungsi Analitik

3.1 Limit dan Kontinuitas Fungsi Kompleks

Definisi 3.1 (Limit Fungsi). Diberikan fungsi $f(z)$ yang terdefinisi pada lingkungan dari z_0 (kecuali mungkin di z_0 sendiri). Kita katakan bahwa:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z - z_0| < \delta$, maka $|f(z) - L| < \epsilon$.

Penting untuk dicatat bahwa z dapat mendekati z_0 dari **segala arah** di bidang kompleks. Jika limit memiliki nilai yang berbeda saat didekati dari arah yang berbeda, maka limit tersebut tidak ada.

Definisi 3.2 (Kontinuitas). Fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu di z_0 jika memenuhi tiga syarat:

1. $f(z_0)$ terdefinisi.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ada.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Contoh 3.1. Buktikan bahwa $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ tidak ada.

Penyelesaian. Kita uji pendekatan dari dua arah yang berbeda:

1. Sepanjang sumbu real ($y = 0$): $z = x$, maka $\bar{z} = x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

2. Sepanjang sumbu imajiner ($x = 0$): $z = iy$, maka $\bar{z} = -iy$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Karena nilai limit berbeda (1 dan -1), maka limit tidak ada. □

Latihan 3.1

1. Hitunglah $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 2z + 1)$.
2. Buktikan menggunakan definisi $\epsilon - \delta$ bahwa $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$.
3. Selidiki apakah $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ ada.
4. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = \bar{z}$ kontinu di seluruh bidang kompleks.
5. Misalkan $f(z) = \frac{z^2+4}{z-2i}$ untuk $z \neq 2i$. Tentukan nilai $f(2i)$ agar fungsi tersebut kontinu di $z = 2i$.

3.2 Definisi Turunan Kompleks (Derivative)

Definisi 3.3 (Turunan Kompleks). Misalkan f adalah fungsi kompleks yang domainnya memuat lingkungan dari titik z_0 . Turunan dari f di z_0 , dilambangkan dengan $f'(z_0)$, didefinisikan sebagai:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

asalkan limit tersebut ada. Jika $f'(z_0)$ ada, kita katakan f **dapat diturunkan** (differentiable) di z_0 .

Penting untuk diingat bahwa $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dapat mendekati nol dari arah mana pun. Jika hasil limit bergantung pada jalur yang diambil Δz menuju nol, maka turunan tidak ada.

Contoh 3.2. Buktikan bahwa fungsi $f(z) = \bar{z}$ tidak memiliki turunan di titik mana pun.

Penyelesaian. Gunakan definisi limit turunan:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \overline{\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Misalkan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$:

1. Jika Δz mendekati 0 melalui sumbu real ($\Delta y = 0$), maka $\overline{\Delta z} = \Delta x$ dan $\Delta z = \Delta x$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

2. Jika Δz mendekati 0 melalui sumbu imajiner ($\Delta x = 0$), maka $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$ dan $\Delta z = i\Delta y$:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

Karena limit berbeda, $f(z) = \bar{z}$ tidak memiliki turunan di mana pun. $\square$

Teorema 3.4 (Aturan Diferensiasi). Aturan turunan pada kalkulus real (aturan pangkat, hasil kali, hasil bagi, dan aturan rantai) tetap berlaku pada fungsi kompleks selama turunan masing-masing fungsi pembentuknya ada.

Latihan 3.2

1. Gunakan definisi limit untuk menghitung turunan dari $f(z) = z^2$ di sebarang titik z .
2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ tidak dapat diturunkan di titik mana pun.
3. Selidiki apakah fungsi $f(z) = |z|^2$ memiliki turunan di $z = 0$. Bagaimana dengan di titik $z \neq 0$?
4. Jika $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, tentukan $f'(i)$ menggunakan aturan hasil bagi.
5. Misalkan f dapat diturunkan di z_0 . Buktikan bahwa f kontinu di z_0 .
6. Tentukan titik-titik di mana fungsi $f(z) = x^2 + iy^2$ memiliki turunan. (Petunjuk: Gunakan definisi limit dan dekati dari sumbu real serta imajiner).

3.3 Persamaan Cauchy-Riemann

Teorema 3.5 (Syarat Perlu Cauchy-Riemann). Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dapat diturunkan di titik $z_0 = x_0 + iy_0$. Maka turunan parsial pertama dari u dan v terhadap x dan y harus ada di (x_0, y_0) dan memenuhi **Persamaan Cauchy-Riemann**:

$$u_x = v_y \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x$$

Selain itu, turunan $f'(z_0)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Teorema 3.6 (Syarat Cukup Keanalitan). Misalkan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefinisi pada lingkungan- ϵ dari z_0 . Jika:

1. Turunan parsial u_x, u_y, v_x, v_y kontinu di (x_0, y_0) , dan
2. Memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di (x_0, y_0) ,

maka f dapat diturunkan di z_0 .

Definisi 3.7 (Fungsi Analitik dan Entire).

- Fungsi f disebut **analitik** di z_0 jika f dapat diturunkan pada suatu lingkungan dari z_0 .
- Fungsi yang analitik di setiap titik pada bidang kompleks disebut fungsi **entire**.

Contoh 3.3. Gunakan persamaan Cauchy-Riemann untuk menunjukkan bahwa $f(z) = e^z$ adalah fungsi entire.

Penyelesaian. Diketahui $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, maka: $u(x, y) = e^x \cos y$ dan $v(x, y) = e^x \sin y$. Turunan parsialnya adalah:

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & v_y &= e^x \cos y \implies u_x = v_y \\ u_y &= -e^x \sin y, & v_x &= e^x \sin y \implies u_y = -v_x \end{aligned}$$

Karena turunan parsialnya kontinu dan memenuhi Cauchy-Riemann di seluruh $\mathbb{C}$, maka $f(z) = e^z$ adalah fungsi entire. Turunannya adalah $f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$. $\square$

Latihan 3.3

1. Tunjukkan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann bahwa $f(z) = |z|^2$ hanya memiliki turunan di $z = 0$ dan tidak analitik di mana pun.
2. Selidiki apakah fungsi $f(z) = \bar{z}^2$ analitik di suatu titik.
3. Diketahui $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. Tentukan di mana fungsi ini gagal menjadi analitik.
4. Tentukan nilai konstanta a, b, c agar fungsi $f(z) = (x + ay) + i(bx + cy)$ menjadi fungsi entire.
5. Misalkan $f(z)$ analitik pada suatu domain D . Buktikan bahwa jika $|f(z)|$ konstan pada D , maka $f(z)$ juga konstan pada D .
6. Jika $f(z) = u + iv$ adalah fungsi analitik, buktikan bahwa gradien dari u dan v saling tegak lurus, yaitu $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
7. Tuliskan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar (r, θ) . (*Petunjuk: Gunakan $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$.*)

3.4 Fungsi Harmonik dan Harmonik Konjugat

Definisi 3.8 (Persamaan Laplace dan Fungsi Harmonik). Sebuah fungsi real $h(x, y)$ dikatakan **harmonik** pada suatu domain jika h memiliki turunan parsial pertama dan kedua yang kontinu dan memenuhi **Persamaan Laplace**:

$$\nabla^2 h = h_{xx} + h_{yy} = 0$$

Teorema 3.9. Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik pada domain D , maka u dan v adalah fungsi-fungsi harmonik pada D .

Definisi 3.10 (Harmonik Konjugat). Diberikan fungsi harmonik $u(x, y)$. Jika terdapat fungsi harmonik lain $v(x, y)$ sedemikian sehingga $f(z) = u + iv$ analitik, maka v disebut sebagai **harmonik konjugat** dari u .

Contoh 3.4. Tunjukkan bahwa $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ adalah harmonik, lalu tentukan harmonik konjugatnya $v(x, y)$.

Penyelesaian. Pertama, cek persamaan Laplace:

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + 1, & u_{xx} &= 2 \\u_y &= -2y, & u_{yy} &= -2\end{aligned}$$

Karena $u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$, maka u harmonik. Selanjutnya, gunakan persamaan Cauchy-Riemann untuk mencari v :

$$1. \ v_y = u_x = 2x + 1 \implies v(x, y) = \int (2x + 1) dy = 2xy + y + \phi(x).$$

$$2. \ v_x = -u_y = -(-2y) = 2y.$$

Turunkan hasil (1) terhadap x : $v_x = 2y + \phi'(x)$. Samakan dengan hasil (2): $2y + \phi'(x) = 2y \implies \phi'(x) = 0 \implies \phi(x) = C$. Jadi, harmonik konjugatnya adalah $v(x, y) = 2xy + y + C$. $\square$

Latihan 3.4

1. Periksa apakah fungsi-fungsi berikut harmonik:

(a) $h(x, y) = e^x \cos y$

(b) $h(x, y) = x^3 - 3xy^2$

2. Tentukan nilai konstanta a agar $u(x, y) = ax^2 + y^2$ menjadi fungsi harmonik.

3. Diberikan $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Tentukan fungsi $u(x, y)$ sedemikian sehingga $f(z) = u + iv$ analitik.

4. Misalkan u dan v adalah dua fungsi harmonik konjugat. Buktikan bahwa perkaliannya, uv , adalah fungsi harmonik jika dan hanya jika $f(z) = u + iv$ adalah konstanta atau berbentuk tertentu.

5. Jika u adalah fungsi harmonik, buktikan bahwa $f(z) = u_x - iu_y$ adalah fungsi analitik.

3.5 Latihan Akhir Bab 3

1. Misalkan $f(z)$ adalah fungsi entire. Jika $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ untuk suatu bilangan real M dan untuk semua $z \in \mathbb{C}$, buktikan bahwa $f(z)$ haruslah konstan. (Petunjuk: Gunakan fungsi $g(z) = e^{f(z)}$ dan Teorema Liouville).
2. Tentukan semua titik di mana fungsi $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$ dapat diturunkan. Apakah fungsi ini analitik di titik-titik tersebut?
3. Jika $f(z) = u + iv$ analitik dan $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$, tentukan $v(x, y)$ dengan syarat $v(0, 0) = 0$. Nyatakan $f(z)$ dalam variabel z .
4. Buktikan bahwa jika $f(z)$ analitik pada domain D dan $f'(z) = 0$ untuk setiap $z \in D$, maka $f(z)$ konstan pada D .
5. Tentukan fungsi entire $f = u + iv$ sedemikian sehingga $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$.
6. Misalkan u harmonik pada domain D . Buktikan bahwa u_{xx} tidak selalu harmonik, namun berikan syarat agar u_{xx} menjadi harmonik.
7. Gunakan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar untuk membuktikan bahwa $f(z) = \operatorname{Log} z$ analitik pada domain $r > 0, -\pi < \theta < \pi$.
8. Misalkan $f(z) = u + iv$ adalah fungsi entire sedemikian sehingga bagian realnya memenuhi $u(x, y) \geq x^2 - y^2$ untuk setiap $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Buktikan bahwa $f(z)$ harus merupakan polinomial berderajat paling tinggi dua.
9. Tentukan semua fungsi analitik $f = u + iv$ sedemikian sehingga $u^2 = v$.
10. Diberikan fungsi $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
 - (a) Buktikan bahwa u harmonik pada domain $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - (b) Cari fungsi harmonik konjugat $v(x, y)$ sedemikian sehingga $f(z) = u + iv$ analitik.
 - (c) Nyatakan $f(z)$ secara eksplisit dalam variabel z .
11. Misalkan $f(z)$ analitik pada domain D . Buktikan bahwa jika $\operatorname{Re}(f(z))$ adalah konstanta, maka $f(z)$ sendiri adalah konstanta pada D .
12. Jika $f(z) = u + iv$ adalah fungsi entire, dan diketahui bahwa $u(x, y) \cdot v(x, y) = c$ untuk suatu konstanta real c , buktikan bahwa $f(z)$ adalah fungsi konstan.
13. Tentukan titik-titik di bidang kompleks di mana fungsi $f(z) = z \cdot |z|$ dapat diturunkan. Apakah fungsi tersebut analitik di titik-titik tersebut? Jelaskan menggunakan kriteria lingkungan (neighborhood).
14. Diketahui $f(z)$ adalah fungsi analitik pada domain D . Definisikan fungsi $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Buktikan bahwa $g(z)$ juga analitik pada domain $D^* = \{z : \bar{z} \in D\}$.

15. Misalkan u adalah fungsi harmonik. Buktikan bahwa $|f'(z)|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2$ di mana f adalah fungsi analitik yang bagian realnya adalah u .
16. Cari semua fungsi entire $f(z)$ yang memenuhi persamaan:

$$f'(z) + f(z) = 0$$

dengan syarat $f(0) = 1$.

17. Tentukan semua nilai $a \in \mathbb{R}$ agar fungsi $u(x, y) = \cos(ax) \cosh y$ menjadi bagian real dari suatu fungsi analitik $f(z)$. Untuk nilai a tersebut, tentukan $f(z)$ dalam bentuk variabel z dengan $f(0) = 1$.

Bab 4

Pengintegralan Kompleks

4.1 Lintasan (Contour) di Bidang Kompleks

Definisi 4.1. Sebuah kurva mulus (smooth curve) di bidang kompleks didefinisikan oleh fungsi parameter $z(t) = x(t) + iy(t)$ untuk $a \leq t \leq b$.

- **Kontur:** Gabungan dari sejumlah hingga kurva mulus yang bersambungan.
- **Kontur Tertutup:** Kontur yang titik awal dan titik akhirnya sama ($z(a) = z(b)$).
- **Kontur Sederhana:** Kontur yang tidak memotong dirinya sendiri (kecuali di titik ujung).

Contoh 4.1. Tentukan parameterisasi untuk lingkaran $|z - i| = 2$ dengan arah berlawanan jarum jam (positif).

Penyelesaian. Pusat lingkaran adalah $z_0 = i$ dan jari-jari $R = 2$. Menggunakan bentuk eksponensial:

$$z(t) = i + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Turunannya adalah $z'(t) = 2ie^{it}$. □

Latihan 4.1

1. Tentukan parameterisasi $z(t)$ untuk ruas garis yang menghubungkan titik $z = 1$ ke titik $z = 2 + i$.
2. Tentukan parameterisasi untuk busur lingkaran $|z| = 1$ dari $z = 1$ ke $z = i$.
3. Periksa apakah kurva $z(t) = t^2 + it^4$ untuk $-1 \leq t \leq 1$ merupakan kontur sederhana.
4. Gambarkan lintasan yang diberikan oleh parameterisasi $z(t) = e^{-it}$ untuk $0 \leq t \leq \pi$. Ke mana arah lintasannya?

—

4.2 Integral Garis Kompleks

Definisi 4.2. Misalkan $f(z)$ kontinu pada kontur C yang memiliki parameterisasi $z(t)$, $a \leq t \leq b$. Integral garis dari f sepanjang C didefinisikan sebagai:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt$$

Teorema 4.3 (Sifat ML-Inequality). Jika $|f(z)| \leq M$ untuk setiap z pada kontur C dengan panjang lintasan L , maka:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot L$$

Contoh 4.2. Hitunglah $\int_C \bar{z} dz$ di mana C adalah setengah lingkaran kanan $|z| = 1$ dari $z = -i$ ke $z = i$.

Penyelesaian. Parameterisasi C : $z(t) = e^{it}$ dengan $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Maka $dz = ie^{it} dt$ dan $\bar{z} = e^{-it}$.

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-it})(ie^{it}) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i dt \\ &= i \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi i \end{aligned}$$

□

Latihan 4.2

1. Hitung $\int_C z^2 dz$ sepanjang garis lurus dari $z = 0$ ke $z = 1 + i$.
2. Hitung $\int_C \frac{1}{z} dz$ di mana C adalah lingkaran satuan $|z| = 1$ berlawanan arah jarum jam.
3. Tanpa menghitung integralnya secara langsung, tunjukkan bahwa:

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

di mana C adalah busur lingkaran $|z| = 2$ dari $z = 2$ ke $z = 2i$.

4. Buktikan bahwa nilai $\int_C (z - z_0)^n dz$ untuk $n \in \mathbb{Z}$ dan C lingkaran $|z - z_0| = R$ adalah $2\pi i$ jika $n = -1$ dan 0 untuk nilai n lainnya.

4.3 Teorema Cauchy-Goursat

Teorema 4.4 (Teorema Cauchy-Goursat). *Jika suatu fungsi f analitik di semua titik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C , maka:*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Definisi 4.5 (Domain Terhubung Sederhana dan Ganda).

1. **Terhubung Sederhana (Simply Connected):** Sebuah domain D dikatakan terhubung sederhana jika setiap kontur tertutup sederhana C yang terletak di dalam D , hanya melingkupi titik-titik yang merupakan anggota dari D .

Secara formal, ini berarti setiap kontur tertutup di dalam D dapat dikerutkan (deformasi kontinu) menjadi sebuah titik tanpa pernah keluar dari batas-batas domain D .

2. **Terhubung Ganda (Multiply Connected):** Sebuah domain D dikatakan terhubung ganda atau banyak jika terdapat setidaknya satu kontur tertutup sederhana di dalam D yang melingkupi titik-titik yang bukan merupakan anggota dari domain D .

Teorema 4.6 (Perluasan Teorema Cauchy-Goursat). *Jika f analitik pada domain terhubung ganda yang dibatasi oleh kontur luar C dan kontur-kontur dalam $C_1, C_2, \dots, C_n$ (semua berarah positif), serta f analitik pada batas-batas tersebut, maka:*

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

Teorema 4.7 (Prinsip Deformasi Lintasan). *Misalkan C_1 dan C_2 adalah dua kontur tertutup sederhana berarah positif, di mana C_2 berada di dalam C_1 . Jika f analitik pada daerah di antara C_1 dan C_2 , maka:*

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

Contoh 4.3. Hitunglah $\oint_C \frac{1}{z^2+4} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 1$.

Penyelesaian. Fungsi $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ gagal analitik di $z = 2i$ dan $z = -2i$. Kedua titik tersebut berada di luar lingkaran $|z| = 1$. Karena f analitik di dalam dan pada kontur C , maka menurut Teorema Cauchy-Goursat:

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4} dz = 0$$

□

Latihan 4.3

1. Hitunglah $\oint_C e^{z^3} dz$ di mana C adalah persegi dengan titik sudut $\pm 1 \pm i$.
2. Misalkan C adalah lingkaran $|z| = 2$ berarah positif. Tunjukkan bahwa $\oint_C \frac{dz}{z-3i} = 0$.
3. Gunakan prinsip deformasi lintasan untuk menghitung $\oint_C \frac{dz}{z}$ di mana C adalah elips $x^2 + 4y^2 = 1$. (Petunjuk: Deformasi elips menjadi lingkaran kecil di sekitar titik asal).
4. Jika C adalah batas dari daerah $1 < |z| < 2$ (annulus), dan f analitik pada daerah tersebut, tuliskan hubungan integral antara batas luar dan batas dalam.
5. Berikan contoh fungsi yang kontinu pada kontur tertutup C tetapi integralnya tidak nol. Mengapa ini tidak kontradiksi dengan Teorema Cauchy-Goursat?

4.4 Rumus Integral Cauchy

Rumus ini merupakan salah satu hasil paling luar biasa dalam analisis kompleks, yang menyatakan bahwa nilai fungsi analitik di dalam sebuah kontur ditentukan sepenuhnya oleh nilai-nilai fungsi tersebut pada batas konturnya.

Teorema 4.8 (Rumus Integral Cauchy). Misalkan f analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C yang berarah positif. Jika z_0 adalah sebarang titik di dalam C , maka:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

atau dalam bentuk integrasi:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

Teorema 4.9 (Rumus Turunan Cauchy). Fungsi analitik memiliki turunan dari semua orde yang juga analitik. Turunan ke- n dari f di titik z_0 diberikan oleh:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Contoh 4.4. Hitunglah $\oint_C \frac{e^{2z}}{z-1} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 2$ berarah positif.

Penyelesaian. Identifikasi fungsi: $f(z) = e^{2z}$ dan $z_0 = 1$. Titik $z_0 = 1$ berada di dalam lingkaran $|z| = 2$. Karena $f(z) = e^{2z}$ adalah fungsi entire (analitik di mana-mana), kita dapat menggunakan Rumus Integral Cauchy:

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot e^{2(1)} = 2\pi i e^2$$

□

Contoh 4.5. Hitunglah $\oint_C \frac{\cos z}{z^3} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 1$ berarah positif.

Penyelesaian. Gunakan rumus turunan Cauchy dengan $f(z) = \cos z$, $z_0 = 0$, dan $n = 2$ (karena penyebutnya z^{2+1}):

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0)$$

Turunan $f(z)$: $f'(z) = -\sin z$, $f''(z) = -\cos z$. Maka $f''(0) = -\cos(0) = -1$. Hasil integralnya: $\frac{2\pi i}{2}(-1) = -\pi i$. $\square$

Latihan 4.4

1. Hitunglah $\oint_C \frac{\sin z}{z - \pi/4} dz$ di mana C adalah persegi yang dibatasi oleh $x = \pm 2, y = \pm 2$.
2. Hitung $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$ jika C adalah lingkaran $|z - 1| = 1$. (Petunjuk: Faktorkan penyebut dan periksa titik mana yang berada di dalam C).
3. Hitung $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 3$.
4. Gunakan rumus turunan Cauchy untuk menghitung $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2z^3} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 1$.
5. Buktikan bahwa jika f analitik pada D dan $|f(z)|$ mencapai nilai maksimum di titik interior $z_0 \in D$, maka $f(z)$ haruslah konstan. (*Prinsip Modulus Maksimum*).

4.5 Latihan Akhir Bab 4

1. Hitunglah integral garis $\int_C \bar{z}^2 dz$ di mana C adalah kontur yang terdiri dari:
 - (a) Ruas garis lurus dari $z = 0$ ke $z = 2i$ dilanjutkan ke $z = 2$.
 - (b) Ruas garis lurus langsung dari $z = 0$ ke $z = 2$.

Apakah hasil keduanya sama? Berikan penjelasan berdasarkan sifat analitik fungsi.

2. Hitunglah nilai dari integral berikut:

$$\oint_C \frac{z^3 + 2z}{(z - i)^3} dz$$

di mana C adalah sebarang kontur tertutup sederhana yang melingkupi titik $z = i$ dengan arah positif.

3. Hitunglah $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z - i| = 1$ berarah positif.
4. Misalkan C adalah batas dari persegi dengan titik-titik sudut $(\pm 2, \pm 2)$ berarah positif. Evaluasilah integral:

$$\oint_C \frac{\cosh z}{z^4 + \pi^2 z^2} dz$$

5. Gunakan Rumus Integral Cauchy untuk membuktikan bahwa:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi$$

(Petunjuk: Tinjau integral $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$ pada lingkaran satuan $|z| = 1$).

6. Tentukan semua nilai yang mungkin dari integral:

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}$$

untuk berbagai pilihan kontur tertutup sederhana C yang tidak melalui titik $z = 1$ dan $z = -1$.

7. Buktikan bahwa jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C yang melingkupi z_0 , maka:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

8. Hitunglah $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 3$. (Petunjuk: Gunakan dekomposisi pecahan parsial atau prinsip deformasi lintasan).
9. Misalkan f adalah fungsi entire yang memenuhi $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$, di mana A, B konstanta positif dan k bilangan bulat non-negatif. Buktikan bahwa f adalah polinomial berderajat paling tinggi k .
10. Evaluasilah $\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$ di mana C adalah lingkaran $|z - i| = 1$.

Bab 5

Deret Taylor, Laurent, dan Teorema Residu

5.1 Deret Taylor dan Deret Laurent

Representasi deret memungkinkan kita untuk mempelajari sifat lokal dari fungsi kompleks secara mendalam. Jika sebuah fungsi berperilaku "baik" (analitik) di suatu titik, kita dapat menggunakan **Deret Taylor** untuk menghampiri nilainya. Namun, tantangan muncul ketika kita menemui titik singularitas, yaitu titik di mana fungsi gagal menjadi analitik. Di sinilah **Deret Laurent** menjadi sangat krusial, karena ia memungkinkan kita untuk mengekspansi fungsi dengan menyertakan pangkat negatif guna memahami perilaku fungsi di sekitar hambatan analitis tersebut.

Teorema 5.1 (Deret Taylor). *Jika $f(z)$ analitik di dalam cakram terbuka $|z - z_0| < R$, maka $f(z)$ dapat dinyatakan secara unik dalam deret pangkat:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{di mana} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Teorema 5.2 (Deret Laurent). *Misalkan $f(z)$ analitik pada domain anulus $A : R_1 < |z - z_0| < R_2$. Maka $f(z)$ memiliki representasi unik yang memuat bagian pangkat positif (analitik) dan pangkat negatif (utama):*

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}}_{\text{Bagian Utama}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Bagian Analitik}}$$

Contoh 5.1. Tentukan deret Laurent dari $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ untuk daerah $0 < |z| < 2$.

Penyelesaian. Fungsi memiliki singularitas di $z = 0$ dan $z = 2$. Kita ingin melakukan ekspansi di sekitar $z = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1 - (z/2)}$$

Karena kita meninjau daerah $|z| < 2$, maka $|z/2| < 1$, sehingga kita dapat menggunakan deret geometri:

$$f(z) = -\frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2z} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right) = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \dots$$

Perhatikan bahwa koefisien dari suku $1/z$ adalah $-1/2$. Nilai ini nantinya akan kita kenal sebagai **Residu**. $\square$

Latihan 5.1

1. Tentukan deret Taylor dari $f(z) = \cos z$ di sekitar $z = \pi$.
2. Cari deret Laurent dari $f(z) = \frac{1}{z-2}$ pada daerah:
 - (a) $|z| < 2$
 - (b) $|z| > 2$
3. Tentukan deret Laurent untuk $f(z) = z^2 e^{1/z}$ di sekitar $z = 0$. Identifikasi koefisien dari suku $1/z$.
4. Ekspansikan $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dalam deret Laurent di anulus $1 < |z| < 2$.
5. Tentukan deret Taylor untuk $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ di sekitar $z = 0$ dan tentukan jari-jari konvergensinya.

5.2 Klasifikasi Singularitas dan Residu

Ketika sebuah fungsi $f(z)$ gagal menjadi analitik di titik z_0 , namun analitik di setiap titik dalam lingkungan cakram $0 < |z - z_0| < R$, maka z_0 disebut sebagai **singularitas terisolasi**. Berdasarkan bentuk deret Laurent-nya di sekitar z_0 , kita dapat mengklasifikasikan singularitas tersebut menjadi tiga jenis utama.

Definisi 5.3 (Klasifikasi Singularitas). Misalkan $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$:

1. **Singularitas Terhapuskan (Removable Singularity)**: Jika semua $b_n = 0$. Fungsi dapat dibuat analitik di z_0 dengan mendefinisikan ulang nilainya.
2. **Pole (Kutub)**: Jika hanya sejumlah hingga b_n yang tidak nol. Jika $b_m \neq 0$ dan $b_n = 0$ untuk semua $n > m$, maka z_0 disebut **pole orde m** . Pole orde 1 disebut **pole sederhana**.
3. **Singularitas Esensial**: Jika terdapat tak hingga banyaknya b_n yang tidak nol.

Definisi 5.4 (Residu). **Residu** dari $f(z)$ di titik singular terisolasi z_0 adalah koefisien b_1 dari suku $1/(z - z_0)$ dalam deret Laurent-nya, dilambangkan dengan:

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1$$

Metode Praktis Menghitung Residu:

- Untuk **Pole Sederhana**:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- Untuk **Pole Orde n** :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Contoh 5.2. Tentukan jenis singularitas dan residu dari $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ di $z = 0$.

Penyelesaian. Gunakan deret Maclaurin untuk $\sin z$:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \dots$$

Pangkat negatif tertinggi adalah $1/z^3$, maka $z = 0$ adalah **pole orde 3**. Residu adalah koefisien dari $1/z$, yaitu $\text{Res}(f, 0) = -1/6$. $\square$

Latihan 5.2

1. Tentukan jenis singularitas di $z = 0$ untuk fungsi-fungsi berikut:

(a) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$

(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$

(c) $f(z) = e^{1/z}$

2. Cari residu di setiap titik singular dari $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$.

3. Tentukan orde pole dan residu dari $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ di titik $z = i$.

4. Jika $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ di mana $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, dan $Q'(z_0) \neq 0$, buktikan bahwa:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

5. Hitung residu dari $f(z) = \cot z$ di titik $z = 0$.

5.3 Teorema Residu Cauchy

Teorema Residu Cauchy merupakan generalisasi dari Teorema Cauchy-Goursat dan Rumus Integral Cauchy. Jika Teorema Cauchy-Goursat menyatakan bahwa integral fungsi analitik pada lintasan tertutup adalah nol, Teorema Residu menjelaskan bahwa jika terdapat "lubang" analitis (singularitas) di dalam lintasan, nilai integralnya ditentukan sepenuhnya oleh residu pada titik-titik tersebut.

Teorema 5.5 (Teorema Residu Cauchy). Misalkan C adalah kontur tertutup sederhana berarah positif. Jika fungsi $f(z)$ analitik di dalam dan pada C , kecuali untuk sejumlah hingga titik singular terisolasi $z_1, z_2, \dots, z_n$ yang berada di dalam C , maka:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

Contoh 5.3. Hitunglah $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 2$ berarah positif.

Penyelesaian. Fungsi $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ memiliki dua titik singular: $z_1 = 0$ dan $z_2 = 1$. Kedua titik tersebut berada di dalam lingkaran $|z| = 2$. Kita hitung residu di masing-masing titik (keduanya adalah pole sederhana):

1. $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{-2}{-1} = 2.$
2. $\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5(1)-2}{1} = 3.$

Berdasarkan Teorema Residu Cauchy:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i(2+3) = 10\pi i$$

□

Latihan 5.3

1. Hitunglah $\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 2$ berarah positif.
2. Evaluasilah $\oint_C \tan z dz$ sepanjang lingkaran $|z| = 2$ berarah positif. (*Petunjuk: Cari titik-titik di mana $\cos z = 0$ di dalam lintasan*).
3. Hitung $\oint_C \frac{e^z-1}{z^2+z} dz$ jika C adalah lingkaran $|z| = 2$.
4. Gunakan teorema residu untuk menghitung $\oint_C \frac{1}{z^2+2z+2} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 2$.
5. Buktikan bahwa $\oint_C \frac{e^{1/z}}{z} dz = 2\pi i$ untuk sebarang kontur tertutup sederhana C yang melingkupi titik asal.

5.4 Latihan Akhir Bab 5

1. Tentukan tiga suku pertama dari bagian utama (principal part) deret Laurent dari fungsi:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

di sekitar titik singular $z = 0$. Tentukan juga jenis singularitasnya.

2. Hitunglah integral berikut menggunakan Teorema Residu:

$$\oint_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz$$

di mana C adalah lingkaran $|z| = 2$ berarah positif.

3. Evaluasilah integral kontur:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$$

jika C adalah:

- (a) Lingkaran $|z - i| = 2$.
 - (b) Lingkaran $|z| = 3$.
4. Hitunglah $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 4$.
 5. Gunakan teknik residu untuk membuktikan nilai integral real berikut:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(Petunjuk: Gunakan substitusi $z = e^{i\theta}$, sehingga $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ dan $d\theta = \frac{dz}{iz}$).

6. Cari semua residu dari fungsi $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ pada seluruh bidang kompleks.
7. Misalkan $f(z)$ memiliki pole sederhana di z_0 . Buktikan bahwa:

$$\text{Res}(f^2, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f^2(z)]$$

Apakah pernyataan ini selalu benar untuk sebarang orde pole?

8. Tentukan nilai integral $\oint_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$ di mana C adalah lingkaran $|z| = 1$.
9. Evaluasilah $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ di mana C adalah garis $y = 0$ dari $x = -R$ ke $x = R$ dan dilanjutkan dengan busur setengah lingkaran atas $|z| = R$ untuk $R > 1$.
10. Misalkan $f(z)$ adalah fungsi entire sedemikian sehingga $f(z)$ tidak pernah bernilai nol. Jika $|f(z)| \rightarrow 1$ saat $|z| \rightarrow \infty$, buktikan menggunakan deret atau residu bahwa $f(z)$ adalah konstanta.

Bab 6

Extra: Teorema Liouville dan Teorema Rouché

Bab ini membahas dua hasil fundamental yang menghubungkan sifat analitik lokal dengan perilaku global fungsi. Teorema Liouville memberikan batasan pada fungsi seluruh (entire), sementara Teorema Rouché merupakan alat topologi yang sangat kuat untuk melokalisasi akar-akar fungsi di dalam suatu kontur.

6.1 Teorema Liouville

Teorema 6.1 (Teorema Liouville). *Jika $f(z)$ adalah fungsi seluruh (entire) dan terbatas pada seluruh bidang kompleks (artinya terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$), maka $f(z)$ adalah konstanta.*

Aplikasi Penting: Teorema Dasar Aljabar Teorema Liouville dapat digunakan untuk membuktikan bahwa setiap polinomial derajat $n \geq 1$ memiliki setidaknya satu akar kompleks. Jika $P(z)$ tidak memiliki akar, maka $1/P(z)$ akan menjadi fungsi seluruh yang terbatas, yang menurut Liouville haruslah konstan. Kontradiksi.

Contoh 6.1. Misalkan f adalah fungsi entire sedemikian sehingga $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$. Buktikan bahwa f adalah konstanta.

Penyelesaian. Definisikan fungsi $g(z) = e^{f(z)}$. Maka:

$$|g(z)| = |e^{u+iv}| = e^u = e^{\operatorname{Re}(f(z))} \leq e^M$$

Karena $g(z)$ adalah fungsi seluruh dan terbatas, maka menurut Teorema Liouville, $g(z)$ konstan. Akibatnya, $f(z)$ juga harus konstan. $\square$

6.2 Teorema Rouché

Teorema ini sangat berguna dalam kompetisi matematika untuk menentukan jumlah akar polinomial dalam suatu daerah cakram tanpa perlu menghitung nilai akarnya.

Teorema 6.2 (Teorema Rouché). Misalkan f dan g analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C . Jika $|g(z)| < |f(z)|$ untuk semua z pada C , maka $f(z)$ dan $f(z) + g(z)$ memiliki jumlah nol (akar) yang sama di dalam C .

Contoh 6.2. Tentukan banyaknya akar dari $P(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$ di dalam lingkaran satuan $|z| < 1$.

Penyelesaian. Kita pilih dua fungsi: $f(z) = -4z^3$ dan $g(z) = z^7 + z - 1$. Pada lingkaran $|z| = 1$:

- $|f(z)| = |-4z^3| = 4|z|^3 = 4$.
- $|g(z)| = |z^7 + z - 1| \leq |z|^7 + |z| + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

Karena $|g(z)| < |f(z)|$ pada kontur $|z| = 1$, maka menurut Teorema Rouché, $f(z) + g(z) = P(z)$ memiliki jumlah akar yang sama dengan $f(z) = -4z^3$ di dalam $|z| < 1$. Karena $-4z^3$ memiliki 3 akar di $z = 0$, maka $P(z)$ memiliki **3 akar** di dalam $|z| < 1$. □

Latihan 6

1. Misalkan f adalah fungsi seluruh dan terdapat konstanta A sedemikian sehingga $|f(z)| \leq A|z|^n$ untuk $|z| \geq R$. Buktikan bahwa f adalah polinomial berderajat paling tinggi n .
2. Tentukan jumlah akar dari $z^4 - 5z + 1 = 0$ di dalam anulus $1 < |z| < 2$. (Petunjuk: Gunakan Teorema Rouché dua kali, sekali untuk $|z| < 2$ dan sekali untuk $|z| < 1$).
3. Tunjukkan bahwa semua akar dari $z^5 + z + 1 = 0$ berada di dalam lingkaran $|z| = 3/2$.
4. Misalkan $f(z)$ analitik di $|z| \leq 1$ dan $|f(z)| < 1$ untuk $|z| = 1$. Buktikan bahwa $f(z)$ memiliki tepat satu titik tetap (yaitu $f(z_0) = z_0$) di dalam $|z| < 1$.
5. Gunakan Teorema Liouville untuk menunjukkan bahwa fungsi $\sin z$ tidak mungkin terbatas pada bidang kompleks $\mathbb{C}$.

Bab 7

Simulasi Pengayaan ONMIPA

7.1 Bagian I: Isian Singkat

Tentukan jawaban akhir dari setiap persoalan berikut.

1. Nilai dari $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2026}$ adalah ...
2. Misalkan $f(z) = u + iv$ adalah fungsi analitik. Jika $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, maka nilai dari $f'(i)$ adalah ...
3. Nilai integral kontur $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$ dengan arah positif adalah ...
4. Jika $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ memiliki jari-jari konvergensi $R = 2$, maka jari-jari konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ adalah ...
5. Banyaknya akar-akar dari polinomial $P(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$ di dalam cakram satuan $|z| < 1$ adalah ... (Petunjuk: Teorema Rouché).
6. Misalkan z_1, z_2, z_3 adalah akar-akar dari persamaan $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$. Nilai dari $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ adalah ...
7. **(Geometri)** Diketahui titik-titik z_1, z_2, z_3 pada bidang kompleks membentuk segitiga sama sisi yang terletak pada lingkaran satuan $|z| = 1$. Nilai dari $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ adalah ...
8. Nilai integral $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2 \sinh z} dz$ adalah ...
9. Misalkan $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ adalah fungsi pembangkit bilangan Fibonacci. Jari-jari konvergensi dari deret tersebut adalah ...
10. Jika $w = e^{i2\pi/n}$, maka hasil kali panjang tali busur dari titik 1 ke semua titik w^k lainnya, yaitu $\prod_{k=1}^{n-1} |1 - w^k|$, bernilai ...
11. Nilai dari $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$ adalah ...
12. Jika $f(z)$ adalah fungsi entire sedemikian sehingga $|f(z)| \leq |\sin z|$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$, maka $f(z)$ harus berbentuk ...

13. Banyaknya titik tetap (fixed points) dari pemetaan Möbius $f(z) = \frac{3z+i}{z-i}$ adalah ...
14. Luas daerah di bidang w yang merupakan image dari cakram $|z| \leq 1$ di bawah pemetaan $w = z^2 + z$ adalah ...
15. Misalkan $z = x + iy$. Himpunan titik-titik yang memenuhi $|z - 1| = 2|z + 1|$ membentuk sebuah lingkaran dengan pusat di titik ... dan jari-jari ...

7.2 Bagian II: Uraian (Essay)

Berikan pembuktian atau langkah penyelesaian yang sistematis.

1. **(Analitik & Harmonik)** Tunjukkan bahwa jika $f(z)$ adalah fungsi analitik pada domain D sedemikian sehingga $|f(z)|$ adalah konstanta, maka $f(z)$ haruslah konstan pada D . Gunakan persamaan Cauchy-Riemann dalam pembuktian Anda.
2. **(Aplikasi Residu)** Hitunglah nilai integral tak wajar berikut menggunakan teknik integrasi kompleks:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

3. **(Deret Laurent & Klasifikasi)** Diberikan fungsi $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$.
 - (a) Buktikan bahwa $z = 0$ adalah singularitas terhapuskan (removable singularity).
 - (b) Tentukan nilai $f(0)$ agar fungsi tersebut menjadi analitik di $z = 0$.
 - (c) Tentukan residu dari $g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ di $z = 0$.
4. **(Prinsip Modulus Maksimum)** Misalkan $f(z)$ analitik pada cakram tertutup $|z| \leq 1$. Jika $|f(z)| \leq M$ untuk semua z dengan $|z| = 1$, dan $f(0) = a$ di mana a adalah konstanta kompleks, buktikan bahwa jika terdapat titik z_0 dengan $|z_0| < 1$ sehingga $|f(z_0)| = M$, maka $f(z)$ adalah fungsi konstan.
5. **(Pemetaan Konformal - Bonus)** Tentukan peta (image) dari garis $x = 1$ di bawah pemetaan inversi $w = 1/z$. Tunjukkan secara geometris dan aljabar bahwa bayangannya merupakan sebuah lingkaran.
6. **(Geometri Bilangan Kompleks)** Misalkan z_1, z_2, z_3 adalah tiga bilangan kompleks berbeda yang memenuhi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Buktikan bahwa ketiga titik tersebut membentuk segitiga sama sisi jika dan hanya jika $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tunjukkan juga hubungannya dengan titik berat (centroid) segitiga tersebut.

7. **(Teorema Identitas)** Misalkan f dan g adalah fungsi analitik pada domain D . Jika $f(1/n) = g(1/n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $1/n \in D$, buktikan bahwa $f(z) = g(z)$ untuk semua $z \in D$. Berikan contoh penyanggal jika domain D tidak memuat titik limit dari barisan tersebut.

8. **(Integrasi Kontur Tingkat Tinggi)** Dengan menggunakan teknik integrasi kompleks pada lintasan berbentuk "keyhole" (lubang kunci), hitunglah integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1$$

Jelaskan mengapa pemilihan cabang (branch cut) sangat penting dalam persoalan ini.

9. **(Teorema Rouché & Lokasi Akar)** Tunjukkan bahwa semua akar dari persamaan $z^5 + 15z + 1 = 0$ berada di dalam cakram $|z| < 2$. Selanjutnya, tunjukkan bahwa tepat ada satu akar yang berada di dalam cakram $|z| < 3/2$.
10. **(Analisis Harmonik Lanjut)** Misalkan $u(x, y)$ adalah fungsi harmonik yang terbatas pada seluruh bidang $\mathbb{R}^2$ (artinya terdapat $M > 0$ sehingga $|u(x, y)| \leq M$ untuk semua (x, y)). Buktikan bahwa $u(x, y)$ harus merupakan konstanta. (Petunjuk: Konstruksikan fungsi analitik $f = u + iv$ dan gunakan Teorema Liouville).