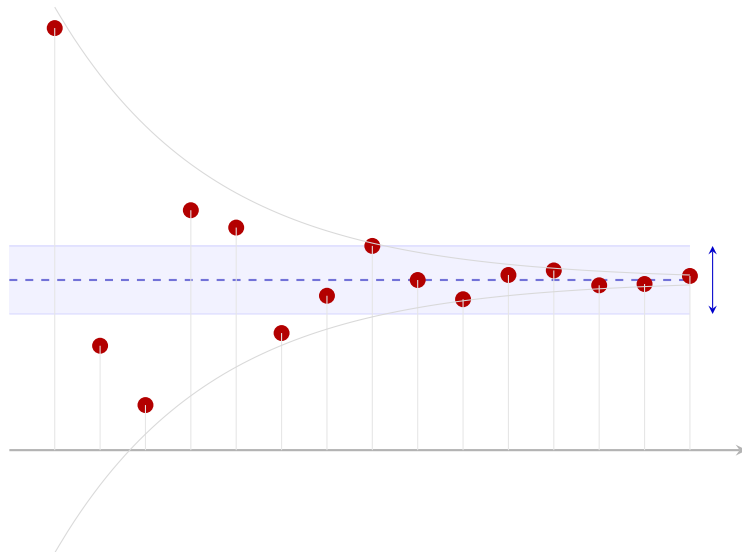

MODUL PELATIHAN ONMIPA 2026

ANALISIS REAL

Panduan Komprehensif: Dari Dasar hingga Persiapan Kompetisi



Disusun Oleh:
Filza Buana Putra
2026

Kata Pengantar

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat-Nya sehingga modul **Modul Pelatihan ONMIPA 2026: Analisis Real** ini dapat diselesaikan. Modul ini disusun sebagai materi pengayaan bagi mahasiswa yang mempersiapkan diri menghadapi kompetisi matematika, khususnya seleksi ONMIPA-PT. Fokus utama modul ini adalah pada penerapan teorema-teorema analisis real untuk menyelesaikan berbagai tipe soal yang menuntut ketelitian logika dan kecakapan dalam pembuktian formal.

Isi modul ini mencakup topik-topik utama dalam analisis real yang disusun secara sistematis:

- **Sistem Bilangan Real:** Membahas sifat aljabar, urutan, dan sifat kelengkapan (Supremum/Infimum).
- **Barisan Bilangan Real:** Fokus pada definisi limit $\varepsilon - N$, barisan Cauchy, dan kriteria konvergensi.
- **Limit dan Kekontinuan:** Meliputi limit fungsi, sifat fungsi kontinu pada interval tertutup, serta kekontinuan seragam.
- **Turunan dan Integral:** Pembahasan mengenai Teorema Nilai Rata-rata, Teorema Taylor, dan formalisasi Integral Riemann.
- **Barisan dan Deret Fungsi:** Membedah perbedaan konvergensi titik demi titik dan seragam, Uji-M Weierstrass, serta deret kuasa (*power series*).

Setiap bab dilengkapi dengan ringkasan materi, contoh soal dengan pembahasan teknis, serta latihan soal mandiri. Penyusunan materi ini dilakukan dengan mempertahankan terminologi standar untuk memudahkan pembaca dalam merujuk pada literatur analisis yang lebih luas.

Semoga modul ini dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi mahasiswa dalam melatih kemampuan analisis dan strategi penyelesaian masalah matematika. Kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk penyempurnaan modul ini di masa mendatang.

Pontianak, Maret 2026

Penulis

Daftar Isi

1	Sistem Bilangan Real dan Topologi	1
1.1	Sifat Aljabar dan Urutan	1
1.2	Sifat Kelengkapan (Aksioma Supremum)	2
1.3	Sifat Archimedes dan Kerapatan $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$	3
1.4	Topologi Dasar di $\mathbb{R}$	5
1.5	Himpunan Kompak dan Teorema Heine-Borel	6
2	Barisan Bilangan Real	8
2.1	Konvergensi Barisan	8
2.2	Teorema Limit	9
2.3	Teorema Konvergensi Monoton	10
2.4	Sub-barisan dan Teorema Bolzano-Weierstrass	11
2.5	Barisan Cauchy	13
3	Limit Fungsi dan Kekontinuan	15
3.1	Limit Fungsi	15
3.2	Fungsi Kontinu	16
3.3	Sifat Fungsi Kontinu pada Interval Tertutup	17
3.4	Kekontinuan Seragam (Uniform Continuity)	18
4	Turunan (Derivatif)	20
4.1	Definisi Turunan dan Aturan Rantai	20
4.2	Teorema Nilai Rata-rata (Mean Value Theorem)	21
4.3	Teorema Taylor	23
5	Integral Riemann	25
5.1	Definisi Integral Riemann	25
6	Deret Fungsi	27
6.1	Konvergensi Titik demi Titik (Pointwise Convergence)	27
6.2	Konvergensi Seragam (Uniform Convergence)	28
6.3	Teorema Pertukaran Limit	29
6.4	Deret Fungsi dan Uji-M Weierstrass	30
6.5	Deret Kuasa (Power Series)	32

7	Latihan Akhir	34
7.1	Bagian I: Isian Singkat	34
7.2	Bagian II: Essay (Pembuktian)	35

Bab 1

Sistem Bilangan Real dan Topologi

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dapat dipandang sebagai sebuah lapangan terurut yang lengkap. Pada bagian ini, kita akan mengulas kembali sifat-sifat dasar yang menjadi landasan operasi di $\mathbb{R}$.

1.1 Sifat Aljabar dan Urutan

Sifat Aljabar

Himpunan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) memenuhi aksioma lapangan, yang meliputi sifat komutatif, asosiatif, distributif, serta eksistensi elemen identitas (0 dan 1) dan elemen invers.

Sifat Urutan

Terdapat himpunan bagian tak kosong $P \subset \mathbb{R}$ (himpunan bilangan real positif) sedemikian sehingga:

1. Jika $a, b \in P$, maka $a + b \in P$ dan $a \cdot b \in P$.
2. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, tepat satu dari kondisi berikut berlaku (Hukum Trikotomi):

$$a \in P, \quad -a \in P, \quad \text{atau} \quad a = 0$$

Nilai Mutlak dan Ketaksamaan Segitiga

Nilai mutlak $|a|$ didefinisikan sebagai a jika $a \geq 0$ dan $-a$ jika $a < 0$. Sifat yang paling fundamental dalam analisis adalah:

Teorema 1.1 (Ketaksamaan Segitiga). *Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, berlaku:*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Contoh Soal

Contoh 1.1. Buktikan bahwa jika $x > -1$, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. (Ketaksamaan Bernoulli).

Penyelesaian. Kita gunakan induksi matematika.

- Untuk $n = 1$, $(1 + x)^1 = 1 + 1x$, sehingga pernyataan benar.
- Asumsikan benar untuk $n = k$, yaitu $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.
- Untuk $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) \\ &= 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2\end{aligned}$$

Karena $kx^2 \geq 0$, maka $1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$. Terbukti.

□

Latihan Soal 1.1

1. Buktikan *Reverse Triangle Inequality*: $||a| - |b|| \leq |a - b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa jika $a < b + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a \leq b$.

1.2 Sifat Kelengkapan (Aksioma Supremum)

Sifat kelengkapan adalah pembeda utama antara $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Q}$. Himpunan bilangan rasional memiliki "lubang" (misalnya tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya tepat 2), sedangkan bilangan real mengisi semua titik pada garis bilangan.

Definisi Batas Atas dan Supremum

Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ adalah himpunan tak kosong.

1. S dikatakan **terbatas di atas** jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Bilangan u disebut **batas atas** dari S .
2. Bilangan $s^* \in \mathbb{R}$ disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari S , dinotasikan $s^* = \sup S$, jika:
 - s^* adalah batas atas dari S .
 - Jika u adalah sebarang batas atas dari S , maka $s^* \leq u$.

Karakterisasi ε untuk Supremum

Dalam pembuktian, seringkali lebih mudah menggunakan kriteria berikut: $s^* = \sup S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $s_\varepsilon \in S$ sedemikian sehingga:

$$s^* - \varepsilon < s_\varepsilon$$

Sifat ini mengatakan bahwa jika kita mengurangi sedikit saja dari supremum, maka bilangan tersebut bukan lagi batas atas.

Contoh Soal

Contoh 1.2. Misalkan $S = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Tentukan $\sup S$ dan buktikan menggunakan karakterisasi ε .

Penyelesaian. Himpunan $S = \{1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$. Kita duga $\sup S = 1$.

1. **Batas Atas:** Karena $n < n+1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\frac{n}{n+1} < 1$. Jadi, 1 adalah batas atas S .
2. **Karakterisasi ε :** Diberikan $\varepsilon > 0$. Kita harus menunjukkan terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1}$. Perhatikan bahwa:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Kita ingin $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, yang ekuivalen dengan $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ atau $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Berdasarkan Sifat Archimedes, kita selalu bisa memilih n yang memenuhi ketaksamaan tersebut. Maka terbukti $\sup S = 1$.

□

Latihan Soal 1.2

1. Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas. Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan definisikan $a + S = \{a + s : s \in S\}$. Buktikan bahwa $\sup(a + S) = a + \sup S$.
2. Buktikan bahwa jika A dan B adalah himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas, dan $A \subseteq B$, maka $\sup A \leq \sup B$.
3. Misalkan $s = \sup S$. Jika $s \notin S$, buktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, himpunan $S \cap (s - \varepsilon, s)$ memuat tak hingga banyaknya anggota S .

1.3 Sifat Archimedes dan Kerapatan $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$

Sifat Archimedes memberikan jaminan bahwa tidak ada bilangan real yang "tak hingga besarnya". Secara intuitif, jika kita memiliki langkah sekecil apa pun, kita tetap bisa melampaui jarak sejauh apa pun jika melangkah cukup banyak.

Sifat Archimedes

Teorema 1.2 (Sifat Archimedes). *Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n_x \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x < n_x$.*

Akibat penting: Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Hal ini sering digunakan dalam pembuktian limit untuk menunjukkan bahwa suatu selisih bisa dibuat sekecil mungkin.

Kerapatan Bilangan Rasional

Teorema 1.3 (Teorema Kerapatan). *Jika x dan y adalah bilangan real dengan $x < y$, maka terdapat bilangan rasional $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $x < r < y$.*

Teorema ini memberitahu kita bahwa di antara dua bilangan real yang sangat dekat sekalipun, selalu terselip setidaknya satu bilangan rasional (dan sebenarnya tak hingga banyaknya).

Contoh Soal

Contoh 1.3. Buktikan bahwa terdapat bilangan real positif x sedemikian sehingga $x^2 = 2$.

Penyelesaian. Misalkan $S = \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s, s^2 < 2\}$.

1. S tidak kosong karena $1 \in S$.
2. S terbatas di atas oleh 2 (karena jika $s > 2$, maka $s^2 > 4$).
3. Berdasarkan Aksioma Supremum, $x = \sup S$ ada di $\mathbb{R}$.
4. Dengan menggunakan sifat urutan dan Sifat Archimedes, kita bisa membuktikan dengan kontradiksi bahwa x^2 tidak mungkin < 2 dan tidak mungkin > 2 . Maka satu-satunya kemungkinan adalah $x^2 = 2$.

□

Latihan Soal 1.3

1. Gunakan Sifat Archimedes untuk membuktikan bahwa $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.
2. Buktikan bahwa di antara dua bilangan real $x < y$, terdapat bilangan irasional $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $x < z < y$. (Petunjuk: Gunakan Teorema Kerapatan pada $x/\sqrt{2}$ dan $y/\sqrt{2}$).
3. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$.

1.4 Topologi Dasar di $\mathbb{R}$

Topologi di $\mathbb{R}$ memberikan kerangka kerja untuk membahas limit dan kekontinuan tanpa harus selalu bergantung pada rumus fungsi. Konsep utamanya adalah persekitaran (neighborhood).

Persekitaran, Himpunan Terbuka, dan Tertutup

Definisi 1.4 (Persekitaran). Untuk $c \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, persekitaran- ε dari c adalah himpunan $V_\varepsilon(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < \varepsilon\}$.

Definisi 1.5 (Himpunan Terbuka). Himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **terbuka** jika untuk setiap $x \in G$, terdapat persekitaran $V_\varepsilon(x) \subseteq G$.

Definisi 1.6 (Himpunan Tertutup). Himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **tertutup** jika komplementnya, $F^c = \mathbb{R} \setminus F$, adalah himpunan terbuka.

Titik Limit dan Titik Isolasi

Definisi 1.7 (Titik Limit). Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik limit** dari himpunan S jika setiap persekitaran $V_\varepsilon(x)$ memuat setidaknya satu titik $s \in S$ sedemikian sehingga $s \neq x$.

Teorema 1.8. Himpunan F adalah tertutup jika dan hanya jika F memuat seluruh titik limitnya.

Contoh Soal

Contoh 1.4. Tunjukkan bahwa interval terbuka $G = (0, 1)$ adalah himpunan terbuka.

Penyelesaian. Ambil sebarang $x \in (0, 1)$. Kita harus mencari $\varepsilon > 0$ sehingga $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (0, 1)$. Pilih $\varepsilon = \min\{x, 1 - x\}$. Karena $0 < x < 1$, maka $\varepsilon > 0$. Jika $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, maka:

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$$

Karena $\varepsilon \leq x$, maka $x - \varepsilon \geq 0$. Karena $\varepsilon \leq 1 - x$, maka $x + \varepsilon \leq 1$. Jadi $0 \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \leq 1$, yang berarti $y \in (0, 1)$. Karena berlaku untuk setiap $x \in G$, maka G terbuka. $\square$

Latihan Soal 1.4

1. Tunjukkan bahwa himpunan berhingga $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tidak memiliki titik limit. Apakah ini berarti S tertutup? Jelaskan.
2. Buktikan bahwa irisan dari dua himpunan terbuka adalah terbuka. Berikan contoh yang menunjukkan bahwa irisan dari tak hingga banyaknya himpunan terbuka belum tentu terbuka.

3. Tentukan semua titik limit dari himpunan $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Apakah S merupakan himpunan tertutup?
4. Misalkan A adalah himpunan terbuka dan B adalah himpunan tertutup. Apakah $A \setminus B$ terbuka atau tertutup? Buktikan jawaban Anda.

1.5 Himpunan Kompak dan Teorema Heine-Borel

Konsep kompak menghubungkan sifat lokal suatu himpunan dengan sifat globalnya (keterbatasan). Dalam $\mathbb{R}$, sifat ini menyederhanakan analisis pada interval tertutup.

Definisi 1.5.1 (Open Cover)

Misalkan $K \subseteq \mathbb{R}$. Keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ dikatakan sebagai **Open Cover** bagi K jika $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$.

Definisi 1.5.2 (Himpunan Kompak)

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **kompak** jika setiap Open Cover bagi K memiliki sub-cover yang berhingga. Artinya, terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ sedemikian sehingga:

$$K \subseteq G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$$

Teorema 1.5.3 (Heine-Borel)

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ bersifat kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas.

Contoh Soal

Contoh 1.5. Tunjukkan bahwa $S = (0, 1]$ tidak kompak dengan menggunakan definisi Open Cover.

Penyelesaian. Definisikan keluarga himpunan terbuka $G_n = (\frac{1}{n}, 2)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

1. Perhatikan bahwa $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 2)$. Karena $S \subset (0, 2)$, maka $\{G_n\}$ adalah Open Cover bagi S .
2. Ambil sebarang sub-cover berhingga $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}\}$ dan misalkan $M = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$.
3. Gabungan dari sub-cover berhingga ini adalah $(\frac{1}{M}, 2)$.
4. Namun, $(\frac{1}{M}, 2)$ tidak memuat titik-titik dalam S yang berada di rentang $(0, \frac{1}{M}]$.

5. Karena terdapat Open Cover yang tidak memiliki sub-cover berhingga, S tidak kompak.

Hal ini konsisten dengan Teorema Heine-Borel karena S tidak tertutup di $\mathbb{R}$. $\square$

Latihan Soal 1.5

1. Tentukan apakah himpunan-himpunan berikut kompak atau tidak berdasarkan Teorema Heine-Borel:
 - a. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 10\}$
 - b. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 \leq 0\}$
 - c. $C = [0, \infty)$
2. Buktikan bahwa jika K_1 dan K_2 adalah himpunan kompak, maka $K_1 \cup K_2$ adalah himpunan kompak.
3. Misalkan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompak. Buktikan bahwa setiap himpunan bagian $F \subseteq K$ yang tertutup adalah kompak.
4. Buktikan bahwa setiap himpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}$ memiliki elemen maksimum dan elemen minimum. (*Petunjuk: Gunakan sifat keterbatasan dan ketertertutupan untuk menunjukkan $\sup K \in K$ dan $\inf K \in K$.*)

Bab 2

Barisan Bilangan Real

Analisis barisan berfokus pada perilaku suku-suku barisan (x_n) untuk n yang sangat besar. Fokus utama adalah formalisasi konsep limit guna menghindari ambiguitas intuitif.

2.1 Konvergensi Barisan

Definisi 2.1.1 (Limit Barisan)

Barisan bilangan real (x_n) dikatakan **konvergen** ke $x \in \mathbb{R}$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$, berlaku:

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Notasi: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atau $x_n \rightarrow x$. Jika tidak ada $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi definisi tersebut, barisan dikatakan **divergen**.

Teorema 2.1.2 (Ketunggalan Limit)

Jika barisan (x_n) konvergen, maka limitnya tunggal.

Teorema 2.1.3 (Keterbatasan)

Setiap barisan yang konvergen adalah barisan yang terbatas.

Contoh Soal

Contoh 2.1. Buktikan menggunakan definisi $\varepsilon - N$ bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$.

Penyelesaian. Diberikan $\varepsilon > 0$. Analisis pendahuluan:

$$\left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| = \left| \frac{3n+1 - (3n+6)}{n+2} \right| = \left| \frac{-5}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2}$$

Kita menginginkan $\frac{5}{n+2} < \varepsilon$, yang ekuivalen dengan $n+2 > \frac{5}{\varepsilon}$ atau $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$. Pilih $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $K > \frac{5}{\varepsilon}$. Maka untuk setiap $n \geq K$, berlaku:

$$\left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| = \frac{5}{n+2} < \frac{5}{n} \leq \frac{5}{K} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$. □

Latihan Soal 2.1

1. Buktikan menggunakan definisi $\varepsilon - N$:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

2. Buktikan bahwa jika $x_n \rightarrow x$, maka $|x_n| \rightarrow |x|$. Berikan contoh penyangkal bahwa kebalikannya tidak selalu benar.

3. Buktikan bahwa jika $x_n \rightarrow x$ dengan $x \neq 0$, maka terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n| > \frac{|x|}{2}$ untuk semua $n \geq K$.

4. Misalkan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa jika $x_n \rightarrow x$, maka $x \geq 0$.

2.2 Teorema Limit

Teorema limit menyediakan alat aljabar untuk menganalisis konvergensi barisan melalui operasi penjumlahan, perkalian, dan pembagian, serta teknik perbandingan.

Teorema 2.2.1 (Aljabar Limit)

Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah barisan bilangan real yang masing-masing konvergen ke x dan y . Maka:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = cx$ untuk setiap konstanta $c \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{x}{y}$, dengan syarat $y_n \neq 0$ dan $y \neq 0$.

Teorema 2.2.2 (Teorema Apit / Squeeze Theorem)

Misalkan (x_n) , (y_n) , dan (z_n) adalah barisan bilangan real sedemikian sehingga $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk semua $n \geq K$. Jika $\lim x_n = \lim z_n = L$, maka barisan (y_n) konvergen dan $\lim y_n = L$.

Contoh Soal

Contoh 2.2. Tentukan limit dari barisan $y_n = \frac{\sin(n)}{n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian. Diketahui bahwa $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Bagi seluruh ruas dengan n (karena $n > 0$):

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Misalkan $x_n = -1/n$ dan $z_n = 1/n$. Telah diketahui bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$. Berdasarkan Teorema Apit, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$. $\square$

Latihan Soal 2.2

1. Hitunglah limit barisan berikut dengan menggunakan Teorema Aljabar Limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 - 4}$$

2. Misalkan (x_n) adalah barisan sedemikian sehingga $x_n \geq 0$. Buktikan bahwa jika $\lim x_n = x$, maka $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$.
3. Gunakan Teorema Apit untuk menentukan limit barisan $x_n = (2^n + 3^n)^{1/n}$.
4. Buktikan bahwa jika $\lim x_n = 0$ dan (y_n) adalah barisan terbatas (tidak perlu konvergen), maka $\lim(x_n y_n) = 0$.
5. Berikan contoh dua barisan (x_n) dan (y_n) yang keduanya divergen, namun barisan jumlah $(x_n + y_n)$ konvergen.

2.3 Teorema Konvergensi Monoton

Teorema Konvergensi Monoton (TKM) menghubungkan sifat urutan (monotonitas) dengan sifat keterbatasan untuk menjamin eksistensi limit.

Definisi 2.3.1 (Barisan Monoton)

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real.

1. (x_n) dikatakan **monoton naik** jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
2. (x_n) dikatakan **monoton turun** jika $x_n \geq x_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.2 (Teorema Konvergensi Monoton)

Barisan bilangan real (x_n) yang monoton konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut terbatas.

1. Jika (x_n) monoton naik dan terbatas di atas, maka $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Jika (x_n) monoton turun dan terbatas di bawah, maka $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Contoh Soal

Contoh 2.3. Misalkan barisan (x_n) didefinisikan secara rekursif dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ untuk $n \geq 1$. Buktikan bahwa (x_n) konvergen dan tentukan limitnya.

Penyelesaian. **Langkah 1: Keterbatasan.** Kita tunjukkan $x_n < 2$ dengan induksi. Untuk $n = 1$, $x_1 = 1 < 2$. Asumsikan $x_k < 2$. Maka $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Jadi (x_n) terbatas di atas.

Langkah 2: Monotonitas. Perhatikan $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (2 - x_n)(1 + x_n)$. Karena $x_n < 2$ dan $x_n > 0$, maka $x_{n+1}^2 - x_n^2 > 0$, sehingga $x_{n+1} > x_n$. Barisan monoton naik.

Langkah 3: Konvergensi. Berdasarkan TKM, (x_n) konvergen ke L .

$$L = \sqrt{2 + L} \implies L^2 - L - 2 = 0 \implies (L - 2)(L + 1) = 0$$

Karena $x_n > 0$, maka $L = 2$. □

Latihan Soal 2.3

1. Misalkan $x_1 = 8$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) monoton turun dan terbatas di bawah oleh 4. Tentukan limitnya.
2. Buktikan bahwa barisan $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ adalah barisan monoton naik dan terbatas di atas. (Limit ini mendefinisikan bilangan Euler e).
3. Misalkan (x_n) adalah barisan terbatas. Definisikan $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$. Tunjukkan bahwa (s_n) adalah barisan monoton turun dan konvergen. (Limit ini disebut *limit superior*).
4. Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas. Misalkan $s = \sup A$. Buktikan terdapat barisan monoton naik (a_n) di A sedemikian sehingga $\lim a_n = s$.

2.4 Sub-barisan dan Teorema Bolzano-Weierstrass

Konsep sub-barisan memungkinkan kita untuk mempelajari perilaku sebagian dari suku-suku barisan asal. Ini sangat berguna untuk menunjukkan divergensi atau mencari titik limit dari barisan yang berosilasi.

Definisi 2.4.1 (Sub-barisan)

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real dan let $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ adalah barisan bilangan asli yang naik tegas. Barisan (x_{n_k}) yang didefinisikan oleh $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ disebut sebagai **sub-barisan** dari (x_n) .

Teorema 2.1 (Kriteria Konvergensi Sub-barisan). *Jika barisan (x_n) konvergen ke x , maka setiap sub-barisan dari (x_n) juga konvergen ke x .*

Teorema 2.4.2 (Teorema Bolzano-Weierstrass)

Teorema ini menjamin eksistensi sub-barisan yang konvergen pada himpunan yang terbatas.

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass). *Setiap barisan bilangan real yang terbatas memiliki setidaknya satu sub-barisan yang konvergen.*

Contoh Soal

Contoh 2.4. Tunjukkan bahwa barisan $x_n = (-1)^n$ divergen menggunakan kriteria sub-barisan.

Penyelesaian. Andaikan (x_n) konvergen ke suatu nilai L . Berdasarkan Teorema 2.4.1, setiap sub-barisannya harus konvergen ke L .

1. Pilih sub-barisan genap $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$. Maka $\lim x_{2k} = 1$. Jadi $L = 1$.
2. Pilih sub-barisan ganjil $x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$. Maka $\lim x_{2k-1} = -1$. Jadi $L = -1$.

Karena limit sub-barisan tidak tunggal ($1 \neq -1$), terjadi kontradiksi. Maka barisan $x_n = (-1)^n$ divergen. $\square$

Latihan Soal 2.4

1. Berikan contoh barisan yang tidak terbatas tetapi memiliki sub-barisan yang konvergen.
2. Misalkan (x_n) adalah barisan terbatas. Buktikan bahwa jika setiap sub-barisan yang konvergen dari (x_n) memiliki limit yang sama yaitu x , maka barisan (x_n) sendiri konvergen ke x .
3. Gunakan Teorema Bolzano-Weierstrass untuk membuktikan bahwa setiap himpunan terbatas dan tak hingga $S \subset \mathbb{R}$ memiliki setidaknya satu titik limit.
4. Misalkan (x_n) adalah barisan yang didefinisikan oleh $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Tentukan semua limit sub-barisan yang mungkin dari (x_n) .

2.5 Barisan Cauchy

Kriteria Cauchy menyediakan metode untuk menentukan konvergensi suatu barisan dalam ruang yang lengkap seperti $\mathbb{R}$ tanpa memerlukan kandidat limit x di awal.

Definisi 2.5.1 (Barisan Cauchy)

Barisan bilangan real (x_n) disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $H \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $n, m \geq H$, berlaku:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Teorema 2.5.2 (Keterbatasan Barisan Cauchy)

Setiap barisan Cauchy adalah barisan yang terbatas.

Teorema 2.5.3 (Kriteria Konvergensi Cauchy)

Barisan bilangan real (x_n) konvergen jika dan hanya jika (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Catatan: Sifat ini menegaskan bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang metrik yang **lengkap** (complete). Hal ini tidak berlaku di $\mathbb{Q}$, di mana terdapat barisan Cauchy yang "limitnya" adalah bilangan irasional (tidak ada di $\mathbb{Q}$).

Contoh Soal

Contoh 2.5. Buktikan bahwa barisan $x_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy.

Penyelesaian. Diberikan $\varepsilon > 0$. Kita harus mencari $H \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n, m \geq H$, maka $|1/n - 1/m| < \varepsilon$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $m \geq n$. Maka:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

Agar $\frac{2}{n} < \varepsilon$, kita butuh $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Pilih $H \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka untuk setiap $n, m \geq H$, berlaku:

$$|x_n - x_m| \leq \frac{2}{H} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa $x_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy. □

Latihan Soal 2.5

1. Buktikan bahwa setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy.
2. Misalkan (x_n) adalah barisan yang memenuhi $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ untuk suatu $0 < r < 1$. Buktikan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

3. Tunjukkan bahwa barisan $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ bukan merupakan barisan Cauchy. (*Petunjuk: Periksa $|x_{2n} - x_n|$*).
4. Buktikan bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka $(x_n y_n)$ juga merupakan barisan Cauchy.

Bab 3

Limit Fungsi dan Kekontinuan

Setelah mempelajari perilaku barisan (domain diskrit), kita sekarang beralih ke fungsi dengan domain kontinu. Fokus utama bab ini adalah memahami perilaku fungsi $f(x)$ saat x berada di sekitar titik tertentu.

3.1 Limit Fungsi

Definisi 3.1.1 (Limit Fungsi $\varepsilon - \delta$)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dan c adalah titik limit dari A . Bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai **limit** dari f di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ yang memenuhi:

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notasi: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Teorema 3.1.2 (Kriteria Barisan untuk Limit)

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di $A \setminus \{c\}$ yang konvergen ke c , barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L .

Catatan: Teorema ini sangat berguna untuk membuktikan bahwa suatu limit **tidak ada** dengan cara mencari dua barisan berbeda yang menuju c tetapi menghasilkan limit fungsi yang berbeda.

Contoh Soal

Contoh 3.1. Buktikan menggunakan definisi $\varepsilon - \delta$ bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$.

Penyelesaian. Diberikan $\varepsilon > 0$. Kita harus mencari $\delta > 0$ sedemikian sehingga:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |(3x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Perhatikan manipulasi aljabar berikut:

$$|(3x - 1) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$$

Kita menginginkan $3|x - 2| < \varepsilon$, yang ekuivalen dengan $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Maka jika $0 < |x - 2| < \delta$, berlaku:

$$|(3x - 1) - 5| = 3|x - 2| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. □

Latihan Soal 3.1

1. Buktikan menggunakan definisi $\varepsilon - \delta$:
 - a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
2. Gunakan Kriteria Barisan untuk membuktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ tidak ada.
3. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan $L > 0$, maka terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap A, x \neq c$.
4. Misalkan $f(x) = x$ jika $x \in \mathbb{Q}$ dan $f(x) = 0$ jika $x \notin \mathbb{Q}$ (Fungsi Dirichlet termodifikasi). Tentukan apakah $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ada.

3.2 Fungsi Kontinu

Kekontinuan merupakan sifat lokal fungsi yang menjamin bahwa perubahan kecil pada domain hanya akan menghasilkan perubahan kecil pada range.

Definisi 3.2.1 (Kekontinuan di Satu Titik)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in A$. Fungsi f dikatakan **kontinu di titik** c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$:

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Catatan: Definisi ini mengimplikasikan tiga syarat: $f(c)$ terdefinisi, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada, dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Teorema 3.2.2 (Kriteria Barisan untuk Kekontinuan)

Fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c , barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

Contoh Soal

Contoh 3.2. Misalkan $f(x) = |x|$. Buktikan bahwa f kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian. Diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|x - c| < \delta$, berlaku:

$$|f(x) - f(c)| = ||x| - |c||$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga terbalik (*Reverse Triangle Inequality*):

$$||x| - |c|| \leq |x - c|$$

Maka:

$$|f(x) - f(c)| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, maka $f(x) = |x|$ kontinu pada $\mathbb{R}$. $\square$

Latihan Soal 3.2

1. Tentukan apakah fungsi berikut kontinu di $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

2. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di c dan $f(c) > 0$. Buktikan terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in V_\delta(c)$.
3. Buktikan bahwa jika f dan g kontinu pada A , maka fungsi $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ juga kontinu pada A .
4. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi persamaan fungsional Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa jika f kontinu di $x = 0$, maka f kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$.

3.3 Sifat Fungsi Kontinu pada Interval Tertutup

Jika suatu fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas $[a, b]$, maka fungsi tersebut memiliki sifat-sifat khusus yang tidak dimiliki oleh fungsi kontinu pada interval terbuka.

Teorema 3.3.1 (Keterbatasan)

Jika $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$.

Teorema 3.3.2 (Teorema Nilai Ekstrem)

Jika $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak M dan nilai minimum mutlak m pada $[a, b]$. Artinya, terdapat $x^*, x_* \in [a, b]$ sedemikian sehingga:

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

untuk semua $x \in [a, b]$.

Teorema 3.3.3 (Teorema Nilai Antara / IVT)

Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$. Jika k adalah sebarang bilangan di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat setidaknya satu $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = k$.

Akibat (Teorema Bolzano): Jika $f(a)$ dan $f(b)$ memiliki tanda yang berbeda ($f(a) \cdot f(b) < 0$), maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$. Ini adalah dasar dari metode biseksi dalam mencari akar.

Contoh Soal

Contoh 3.3. Buktikan bahwa persamaan $x^3 - x - 1 = 0$ memiliki setidaknya satu akar real di dalam interval $[1, 2]$.

Penyelesaian. Misalkan $f(x) = x^3 - x - 1$. Karena f adalah polinom, maka f kontinu pada $\mathbb{R}$, khususnya pada $[1, 2]$.

$$1. f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0.$$

$$2. f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

Karena $f(1) < 0 < f(2)$, berdasarkan Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (1, 2)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$. Terbukti. $\square$

Latihan Soal 3.3

1. Berikan contoh fungsi yang kontinu pada interval terbuka $(0, 1)$ tetapi tidak terbatas. Mengapa hal ini tidak kontradiksi dengan Teorema 3.3.1?
2. Buktikan bahwa jika $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ kontinu, maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga $f(c) = c$ (Titik Tetap/Fixed Point).
3. Misalkan f kontinu pada $[0, 1]$ dan $f(0) = f(1)$. Buktikan terdapat $c \in [0, 1/2]$ sedemikian sehingga $f(c) = f(c + 1/2)$.
4. Gunakan Teorema Nilai Antara untuk membuktikan bahwa setiap polinom berderajat ganjil memiliki setidaknya satu akar real.

3.4 Kekontinuan Seragam (Uniform Continuity)

Kekontinuan seragam adalah penguatan dari konsep kekontinuan. Pada kekontinuan biasa, nilai δ bergantung pada ε dan titik c . Pada kekontinuan seragam, nilai δ hanya bergantung pada ε untuk seluruh domain.

Definisi 3.4.1 (Kekontinuan Seragam)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan **kontinu seragam** pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $u, v \in A$:

$$|u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

Teorema 3.4.2 (Kekontinuan Seragam pada Himpunan Kompak)

Jika $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada himpunan kompak K , maka f kontinu seragam pada K . *Konsekuensi:* Setiap fungsi yang kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ pasti kontinu seragam pada interval tersebut.

Kriteria Ketidakkontinuan Seragam

Fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **tidak** kontinu seragam pada A jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan $(u_n), (v_n)$ di A sedemikian sehingga $\lim(u_n - v_n) = 0$ namun $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh Soal

Contoh 3.4. Tunjukkan bahwa $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinu seragam pada $[1, \infty)$ tetapi tidak kontinu seragam pada $(0, 1)$.

Penyelesaian. **1. Pada $[1, \infty)$:** Ambil $u, v \in [1, \infty)$.

$$|f(u) - f(v)| = \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right| = \frac{|v - u|}{uv}$$

Karena $u \geq 1$ and $v \geq 1$, maka $uv \geq 1$, sehingga $\frac{1}{uv} \leq 1$. Dapatkan $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$. Pilih $\delta = \varepsilon$, maka terbukti kontinu seragam.

2. Pada $(0, 1)$: Pilih barisan $u_n = \frac{1}{n}$ dan $v_n = \frac{1}{n+1}$. Maka $\lim(u_n - v_n) = \lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Namun, $|f(u_n) - f(v_n)| = |n - (n+1)| = 1$. Untuk $\varepsilon_0 = 1/2$, syarat $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon_0$ terpenuhi. Maka tidak kontinu seragam. $\square$

Latihan Soal 3.4

1. Buktikan bahwa $f(x) = x^2$ kontinu seragam pada $[0, 2]$, tetapi tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.
2. Buktikan bahwa setiap fungsi Lipschitz (fungsi yang memenuhi $|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|$ untuk suatu konstanta $L > 0$) adalah kontinu seragam.
3. Misalkan f dan g kontinu seragam pada A . Apakah $f \cdot g$ selalu kontinu seragam pada A ? Berikan bukti atau contoh penyangkal.
4. Buktikan bahwa jika f kontinu seragam pada $(a, b]$, maka $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ada dan berhingga.

Bab 4

Turunan (Derivatif)

Turunan merupakan konsep pusat dalam analisis yang mengukur sensitivitas perubahan nilai fungsi terhadap perubahan inputnya. Secara geometris, turunan menyatakan kemiringan garis singgung kurva di suatu titik.

4.1 Definisi Turunan dan Aturan Rantai

Definisi 4.1.1 (Turunan di Satu Titik)

Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah interval terbuka, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dan $c \in I$. Fungsi f dikatakan **terdiferensialkan** (memiliki turunan) di c jika limit berikut ada:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Jika kita misalkan $h = x - c$, maka definisi tersebut ekuivalen dengan:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Teorema 4.1.2 (Turunan Mengimplikasikan Kekontinuan)

Jika f terdiferensialkan di c , maka f kontinu di c . *Catatan:* Kebalikannya tidak selalu benar (contoh: $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tetapi tidak memiliki turunan di sana).

Teorema 4.1.3 (Aturan Rantai / Chain Rule)

Misalkan I, J adalah interval di $\mathbb{R}$, $g : I \rightarrow J$ terdiferensialkan di $c \in I$, dan $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensialkan di $g(c)$. Maka fungsi komposisi $f \circ g$ terdiferensialkan di c dan:

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c)$$

Contoh Soal

Contoh 4.1. Gunakan definisi turunan untuk menentukan $f'(c)$ jika $f(x) = \sqrt{x}$ untuk $x > 0$.

Penyelesaian. Berdasarkan definisi:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c}$$

Kalikan dengan sekawan $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}$:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{(x - c)(\sqrt{x} + \sqrt{c})} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Jadi, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. □

Latihan Soal 4.1

1. Buktikan secara formal bahwa $f(x) = |x|$ tidak terdiferensialkan di $x = 0$ menggunakan limit kiri dan limit kanan.
2. Misalkan $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Tentukan apakah $f'(0)$ ada.
3. Buktikan Aturan Hasil Kali (Product Rule): Jika f dan g terdiferensialkan di c , maka $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
4. Gunakan Aturan Rantai untuk mencari turunan dari $h(x) = \cos(x^3 + e^x)$.

4.2 Teorema Nilai Rata-rata (Mean Value Theorem)

Teorema Nilai Rata-rata (TNR) menjamin eksistensi suatu titik di mana kemiringan garis singgung sama dengan kemiringan garis sekan yang menghubungkan ujung-ujung interval.

Teorema 4.2.1 (Teorema Rolle)

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b) . Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapat setidaknya satu titik $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga:

$$f'(c) = 0$$

Teorema 4.2.2 (Teorema Nilai Rata-rata)

Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b) . Maka terdapat setidaknya satu titik $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Konsekuensi Penting

1. Jika $f'(x) = 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f adalah fungsi konstan pada $[a, b]$.
2. Jika $f'(x) = g'(x)$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka $f(x) = g(x) + C$ untuk suatu konstanta C .
3. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f monoton naik tegas pada $[a, b]$.

Contoh Soal

Contoh 4.2. Buktikan ketaksamaan $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x < y$. Misalkan $f(t) = \sin t$. Karena f kontinu pada $[x, y]$ dan terdiferensialkan pada (x, y) , berdasarkan TNR terdapat $c \in (x, y)$ sedemikian sehingga:

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = f'(c) = \cos c$$

Ambil nilai mutlak pada kedua ruas:

$$\frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|} = |\cos c|$$

Karena $|\cos c| \leq 1$ untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, maka:

$$\frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|} \leq 1 \implies |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$$

Terbukti. □

Latihan Soal 4.2

1. Gunakan Teorema Rolle untuk menunjukkan bahwa persamaan $x^3 + 3x + K = 0$ memiliki paling banyak satu akar real untuk setiap konstanta K .
2. Misalkan f terdiferensialkan pada $\mathbb{R}$ dan $f'(x) \leq 5$ untuk semua x . Jika $f(0) = 2$, berapakah nilai maksimum yang mungkin bagi $f(4)$?
3. Gunakan TNR untuk membuktikan bahwa $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ untuk $x > 0$.
4. Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b) . Buktikan bahwa jika $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L$, maka turunan kanan $f'_+(a)$ ada dan nilainya sama dengan L .

4.3 Teorema Taylor

Teorema Taylor menyediakan metode untuk menyatakan fungsi sebagai jumlah dari polinomial derajat n dan sebuah suku sisa (remainder) yang merepresentasikan galat aproksimasi.

Teorema 4.3.1 (Teorema Taylor)

Misalkan $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$, dan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga f dan turunannya $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada I , serta $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b) . Misalkan $x_0 \in I$. Untuk setiap $x \in I$, terdapat titik c di antara x dan x_0 sedemikian sehingga:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

di mana $P_n(x)$ adalah **Polinomial Taylor**:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dan $R_n(x)$ adalah **Suku Sisa Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Contoh Soal

Contoh 4.3. Gunakan Teorema Taylor untuk mengaproksimasi $e^{0.1}$ dengan polinomial derajat 2 di sekitar $x_0 = 0$, dan berikan batas atas galatnya.

Penyelesaian. Misalkan $f(x) = e^x$. Maka $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$. Di $x_0 = 0$, semua turunan bernilai 1. Polinomial Taylor derajat 2:

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Untuk $x = 0.1$: $P_2(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} = 1.105$. Suku sisa $R_2(0.1)$ untuk suatu $c \in (0, 0.1)$:

$$R_2(0.1) = \frac{e^c}{3!}(0.1)^3 = \frac{e^c}{6000}$$

Karena $e^c < e^{0.1} < 3$, maka galat $|R_2(0.1)| < \frac{3}{6000} = 0.0005$. □

Latihan Soal 4.3

1. Tentukan Polinomial Taylor derajat n untuk $f(x) = \sin x$ di sekitar $x_0 = 0$.
2. Gunakan Teorema Taylor untuk membuktikan bahwa $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

3. Tentukan nilai n terkecil agar aproksimasi Polinomial Taylor e^x di sekitar $x_0 = 0$ memiliki galat kurang dari 10^{-4} pada interval $[0, 1]$.
4. Misalkan f memiliki turunan kedua yang kontinu pada $[a, b]$. Jika $f'(a) = f'(b) = 0$, buktikan terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

Bab 5

Integral Riemann

Integral Riemann memberikan landasan formal untuk menghitung luas daerah di bawah kurva melalui proses limit dari penjumlahan persegi panjang yang semakin kecil.

5.1 Definisi Integral Riemann

Definisi 5.1.1 (Partisi dan Jumlah Darboux)

Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Partisi P dari $[a, b]$ adalah himpunan berhingga $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sedemikian sehingga $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Untuk setiap sub-interval $[x_{i-1}, x_i]$, definisikan:

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{dan} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

1. **Jumlah Darboux Atas:** $U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$
2. **Jumlah Darboux Bawah:** $L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$

Definisi 5.1.2 (Integrabilitas Riemann)

Fungsi f dikatakan **terintegralkan Riemann** pada $[a, b]$ jika:

$$\inf\{U(f, P) : P\} = \sup\{L(f, P) : P\}$$

Nilai bersama tersebut dinamakan integral Riemann dari f pada $[a, b]$, dinotasikan $\int_a^b f(x) dx$.

Teorema 5.1.3 (Kriteria Integrabilitas)

Fungsi f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat partisi P sedemikian sehingga:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

Teorema 5.1.4 (Teorema Fundamental Kalkulus I)

Misalkan f terintegralkan pada $[a, b]$. Definisikan $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ untuk $x \in [a, b]$. Maka F kontinu pada $[a, b]$. Jika f kontinu di $c \in [a, b]$, maka F terdiferensialkan di c dan $F'(c) = f(c)$.

Teorema 5.1.5 (Teorema Fundamental Kalkulus II)

Jika f terintegralkan pada $[a, b]$ dan G adalah antiderivatif dari f (yakni $G' = f$), maka:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Contoh Soal

Contoh 5.1. Gunakan definisi jumlah Darboux untuk menunjukkan bahwa $f(x) = x$ terintegralkan pada $[0, 1]$ dan hitung nilainya.

Penyelesaian. Pilih partisi seragam $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n\}$. Panjang tiap sub-interval adalah $\Delta x = 1/n$. Pada sub-interval $[(i-1)/n, i/n]$, karena f naik, maka $M_i = i/n$ dan $m_i = (i-1)/n$.

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Saat $n \rightarrow \infty$, kedua jumlah menuju $1/2$. Karena $\lim U = \lim L = 1/2$, maka $\int_0^1 x dx = 1/2$. $\square$

Latihan Soal 5.1

1. Buktikan bahwa setiap fungsi yang kontinu pada $[a, b]$ pasti terintegralkan Riemann.
2. Buktikan bahwa setiap fungsi yang monoton pada $[a, b]$ pasti terintegralkan Riemann.
3. Berikan contoh fungsi terbatas yang tidak terintegralkan Riemann (Contoh: Fungsi Dirichlet).
4. Gunakan Teorema Fundamental Kalkulus untuk menghitung $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt$.
5. Buktikan Aturan Integrasi Parsial menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus II.

Bab 6

Deret Fungsi

6.1 Konvergensi Titik demi Titik (Pointwise Convergence)

Konsep dasar konvergensi barisan fungsi bermula dari evaluasi limit pada setiap elemen di domainnya secara individual.

Definisi 6.1.1 (Konvergensi Titik demi Titik)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan (f_n) adalah barisan fungsi yang terdefinisi pada A . Barisan (f_n) dikatakan **konvergen titik demi titik** ke fungsi f pada A jika untuk setiap $x \in A$, barisan bilangan real $(f_n(x))$ konvergen ke bilangan real $f(x)$.

Secara formal, $(f_n) \rightarrow f$ secara titik demi titik jika untuk setiap $x \in A$ dan setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $H \in \mathbb{N}$ (di mana H bergantung pada ε dan x) sedemikian sehingga jika $n \geq H$, maka:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Keterbatasan Konvergensi Titik demi Titik

Konvergensi titik demi titik tidak menjamin reservasi sifat-sifat analitik fungsi. Sifat seperti kekontinuan, keterintegralan, dan keterdiferensialan dari setiap suku f_n tidak selalu diwariskan kepada fungsi limit f .

]

Contoh Kasus: Kehilangan Kekontinuan

Contoh 6.1. Tentukan fungsi limit dari barisan $f_n(x) = x^n$ untuk $x \in [0, 1]$.

Penyelesaian. Evaluasi dilakukan dengan membagi domain menjadi dua bagian:

- Untuk $0 \leq x < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

- Untuk $x = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

Maka fungsi limit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Meskipun setiap f_n kontinu pada $[0, 1]$, fungsi limit f memiliki diskontinuitas di $x = 1$. $\square$

Latihan 6.1

1. Tentukan fungsi limit $f(x)$ dari barisan $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ untuk $x \in \mathbb{R}$.
2. Misalkan $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Tunjukkan bahwa f_n konvergen titik demi titik ke fungsi nol pada $\mathbb{R}$.
3. Berikan contoh barisan fungsi f_n yang terintegralkan pada $[0, 1]$ namun fungsi limitnya tidak terintegralkan.

6.2 Konvergensi Seragam (Uniform Convergence)

Konvergensi seragam adalah bentuk konvergensi yang lebih kuat dibandingkan konvergensi titik demi titik, di mana kecepatan konvergensi barisan fungsi berlaku secara merata di seluruh domain.

Definisi 6.2.1 (Konvergensi Seragam)

Barisan fungsi (f_n) dikatakan **konvergen seragam** ke f pada $A \subseteq \mathbb{R}$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $H \in \mathbb{N}$ (di mana H hanya bergantung pada ε dan tidak bergantung pada x) sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq H$ dan untuk semua $x \in A$, berlaku:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Kriteria Norma-Supremum

Untuk mempermudah pengujian konvergensi seragam, kita dapat menggunakan konsep norma-supremum. Misalkan g adalah fungsi terbatas pada A . Norma-supremum dari g pada A didefinisikan sebagai:

$$\|g\|_A = \sup\{|g(x)| : x \in A\}$$

Teorema: Barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke f pada A jika dan hanya jika:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_A = 0$$

Contoh Soal

Contoh 6.2. Selidiki konvergensi seragam dari $f_n(x) = \frac{x}{n}$ pada $[0, 1]$.

Penyelesaian. Pertama, tentukan fungsi limit titik demi titiknya. Untuk setiap $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

Selanjutnya, hitung norma-supremum $\|f_n - f\|$ pada $[0, 1]$:

$$\|f_n - 0\|_{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, maka barisan f_n konvergen seragam ke $f = 0$ pada $[0, 1]$. $\square$

Kriteria Cauchy untuk Konvergensi Seragam

Barisan fungsi (f_n) konvergen seragam pada A jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $H \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq H$ dan semua $x \in A$, berlaku:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Latihan 6.2

1. Tunjukkan bahwa $f_n(x) = x^n$ tidak konvergen seragam pada $[0, 1]$.
2. Selidiki apakah $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ konvergen seragam pada $[0, 1]$.
3. Buktikan bahwa jika $f_n \rightarrow f$ secara seragam dan $g_n \rightarrow g$ secara seragam pada A , maka $f_n + g_n \rightarrow f + g$ secara seragam pada A .
4. Misalkan $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Tunjukkan bahwa f_n konvergen seragam ke $f(x) = x$ pada $\mathbb{R}$.

6.3 Teorema Pertukaran Limit

Teorema-teorema berikut menetapkan kondisi di mana sifat-sifat analitik dari suku-suku barisan fungsi (f_n) dapat diwariskan kepada fungsi limit f .

Teorema 6.3.1 (Pelestarian Kekontinuan)

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ yang konvergen seragam ke f pada A . Maka f kontinu pada A .

Catatan: Teorema ini sering digunakan untuk membuktikan ketidakkonvergenan seragam melalui kontraposisi. Jika setiap f_n kontinu namun f tidak kontinu, maka konvergensi tersebut tidak seragam.

Teorema 6.3.2 (Pertukaran Limit dan Integral)

Misalkan f_n terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika (f_n) konvergen seragam ke f pada $[a, b]$, maka f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ dan berlaku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema 6.3.3 (Pertukaran Limit dan Turunan)

Pertukaran limit dan turunan memerlukan syarat yang lebih ketat. Misalkan (f_n) terdiferensialkan pada $[a, b]$ sedemikian sehingga:

1. Terdapat setidaknya satu titik $x_0 \in [a, b]$ sehingga $(f_n(x_0))$ konvergen.
2. Barisan turunan (f'_n) konvergen seragam ke suatu fungsi g pada $[a, b]$.

Maka (f_n) konvergen seragam ke suatu fungsi f , di mana f terdiferensialkan dan $f'(x) = g(x)$ (atau $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$).

Contoh Soal

Contoh 6.3. Misalkan $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Tunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, tetapi $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ tidak selalu sama dengan turunan dari fungsi limitnya.

Penyelesaian. 1. Untuk setiap x , $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ secara seragam. Fungsi limitnya adalah $f(x) = 0$ dengan $f'(x) = 0$. 2. Namun, $f'_n(x) = \cos(nx)$. 3. Perhatikan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$. Jadi, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \neq f'(x)$. Hal ini terjadi karena barisan turunan (f'_n) tidak konvergen seragam. $\square$

Latihan 6.3

1. Tunjukkan dengan contoh bahwa teorema pertukaran integral dapat gagal jika konvergensi hanya bersifat titik demi titik.
2. Misalkan $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Tunjukkan bahwa $f_n \rightarrow 0$ secara seragam pada $[0, 1]$, dan periksa apakah $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = f'(1)$.
3. Buktikan bahwa jika $f_n \rightarrow f$ secara seragam pada $[a, b]$ dan setiap f_n adalah fungsi tangga, maka f terintegralkan Riemann.

6.4 Deret Fungsi dan Uji-M Weierstrass

Deret fungsi merupakan jumlahan dari barisan fungsi (f_n) . Kita mendefinisikan konvergensi deret fungsi melalui barisan jumlah parsialnya, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

Definisi 6.4.1 (Konvergensi Seragam Deret)

Deret fungsi $\sum f_n(x)$ dikatakan konvergen seragam ke $f(x)$ pada A jika barisan jumlah parsialnya (S_n) konvergen seragam ke f pada A .

Teorema 6.4.2 (Uji-M Weierstrass)

Ini adalah metode paling efektif untuk menunjukkan konvergensi seragam tanpa harus mengetahui fungsi limitnya secara eksplisit.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi pada A dan terdapat barisan konstanta positif (M_n) sedemikian sehingga:

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk setiap $x \in A$ dan $n \in \mathbb{N}$.
2. Deret bilangan $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergen.

Maka deret fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergen mutlak dan seragam pada A .

Sifat-Sifat Deret Fungsi

Jika $\sum f_n$ konvergen seragam ke f pada $[a, b]$, maka:

- Jika setiap f_n kontinu, maka f kontinu.
- $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ (Integrasi suku-demi-suku).
- Jika f'_n kontinu dan $\sum f'_n$ konvergen seragam, maka $\frac{d}{dx} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ (Diferensiasi suku-demi-suku).

Contoh Soal

Contoh 6.4. Buktikan bahwa deret fungsi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian. 1. Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$. 2. Misalkan $M_n = \frac{1}{n^2}$. Diketahui bahwa deret p dengan $p = 2$ yaitu $\sum \frac{1}{n^2}$ adalah konvergen. 3. Berdasarkan Uji-M Weierstrass, deret tersebut konvergen seragam pada $\mathbb{R}$. 4. Karena setiap suku $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ adalah fungsi kontinu, maka limit penjumlahannya $f(x)$ juga merupakan fungsi kontinu. $\square$

Latihan 6.4

1. Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergen seragam pada $[-1, 1]$.
2. Buktikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ tidak konvergen seragam pada $(-1, 1)$.
3. Gunakan integrasi suku-demi-suku untuk menunjukkan bahwa untuk $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

6.5 Deret Kuasa (Power Series)

Deret kuasa adalah deret fungsi yang memiliki bentuk umum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

di mana a_n adalah koefisien barisan bilangan real dan c adalah pusat deret.

Teorema 6.5.1 (Radius Konvergensi)

Untuk setiap deret kuasa, terdapat nilai $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, yang disebut **radius konvergensi**, sedemikian sehingga:

1. Deret konvergen mutlak jika $|x - c| < R$.
2. Deret divergen jika $|x - c| > R$.
3. Jika $|x - c| = R$, deret dapat konvergen atau divergen (tergantung pada titik ujung interval).

Nilai R dapat ditentukan menggunakan **Uji Rasio** atau **Uji Akar**:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{atau} \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Teorema 6.5.2 (Sifat-Sifat Deret Kuasa)

Misalkan deret kuasa memiliki radius konvergensi $R > 0$. Maka:

- **Konvergensi Seragam:** Deret konvergen seragam pada setiap interval tertutup $[c - K, c + K]$ di mana $0 < K < R$.
- **Kontinuitas:** Fungsi $f(x) = \sum a_n(x - c)^n$ kontinu pada interval $(c - R, c + R)$.
- **Diferensiasi dan Integrasi:** Deret dapat diturunkan atau diintegrasikan suku-demi-suku di dalam interval konvergensinya, dan radius konvergensinya tetap sama.

Contoh Soal

Contoh 6.5. Tentukan radius dan interval konvergensi dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$.

Penyelesaian. Gunakan Uji Rasio pada koefisien $a_n = 1/n$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Maka $R = 1/L = 1$. Deret konvergen untuk $|x - 3| < 1$, yaitu $2 < x < 4$. Uji titik ujung:

- Untuk $x = 4$: $\sum \frac{1^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ (Deret Harmonik, Divergen).
- Untuk $x = 2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (Deret Alternating, Konvergen).

Jadi, interval konvergensinya adalah $[2, 4)$. □

Latihan 6.5

1. Cari radius konvergensi dari deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ memiliki radius konvergensi R . Berapakah radius konvergensi dari $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$? Jelaskan berdasarkan teorema.
3. Gunakan deret kuasa untuk menyatakan fungsi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dan tentukan interval konvergensinya.
4. Buktikan bahwa jika $\sum a_n x^n$ konvergen untuk $x = R$, maka deret tersebut konvergen seragam pada $[0, R]$ (Teorema Abel).

Bab 7

Latihan Akhir

7.1 Bagian I: Isian Singkat

Tentukan nilai atau jawaban akhir dari setiap persoalan berikut.

1. Tentukan nilai dari $\sup\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Jika $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$, tentukan nilai limit barisan (x_n) .
3. Berapakah nilai dari $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$?
4. Tentukan semua nilai a agar fungsi $f(x) = x^2 + a$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.
5. Misalkan $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$. Tentukan nilai $(f^{-1})'(0)$.
6. Tentukan konstanta c sedemikian sehingga $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{cx}-1-x}{x^2}$ ada dan berhingga.
7. Misalkan $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Tentukan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt{n}$.
8. Tentukan jumlah titik diskontinu dari fungsi $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pada interval $[0, 5]$.
9. Tentukan nilai $\inf\{2^n + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.
10. Jika f kontinu dan $\int_0^1 f(xt) dt = 0$ untuk setiap $x \in [0, 1]$, tentukan fungsi $f(x)$.
11. Tentukan limit barisan $x_n = (n!)^{1/n^2}$.
12. Misalkan f terdiferensialkan dua kali dan $f(1/n) = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Tentukan nilai $f'(0)$.
13. Tentukan nilai dari $\int_0^\pi x \sin x dx$.
14. Berapakah radius konvergensi dari deret Taylor $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ di sekitar $x = 0$?

15. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ konvergen.
16. Misalkan $f(x) = x^3 + x$. Jika g adalah fungsi invers dari f , tentukan $g'(2)$.
17. Tentukan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$.
18. Jika f kontinu seragam pada $(0, 1]$, berapakah nilai yang mungkin untuk $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(1/x)f(x)$ jika $f(x) = x$?
19. Tentukan nilai $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$.
20. Tentukan supremum dari himpunan $S = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

7.2 Bagian II: Essay (Pembuktian)

1. Misalkan (x_n) adalah barisan terbatas sedemikian sehingga $x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa (x_n) konvergen.
2. Buktikan bahwa tidak ada fungsi $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ yang kontinu sedemikian sehingga $f(x)$ adalah bilangan rasional untuk setiap $x \in [0, 1]$ namun f tidak konstan.
3. Misalkan $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. Buktikan bahwa f kontinu seragam pada $[0, \infty)$.
4. Buktikan bahwa jika f terdiferensialkan pada $[a, b]$ dan $f'(a) < k < f'(b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = k$. (Teorema Darboux).
5. Gunakan Teorema Taylor untuk membuktikan bahwa $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x > 0$.
6. Misalkan f kontinu pada $[0, 1]$ sedemikian sehingga $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ untuk setiap $n = 0, 1, 2, \dots$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk semua $x \in [0, 1]$.
7. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa f adalah fungsi konstan.
8. Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.
9. Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ untuk setiap fungsi kontinu g pada $[a, b]$. Buktikan $f(x) = 0$.
10. Konstruksi sebuah barisan fungsi $f_n(x) = x^n$ pada $[0, 1]$. Tunjukkan bahwa limit titik demi titiknya (*pointwise limit*) ada, tetapi fungsinya tidak kontinu pada $[0, 1]$.