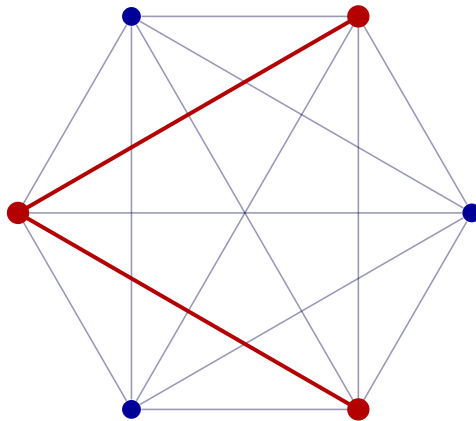

MODUL PELATIHAN ONMIPA 2026

KOMBINATORIKA

Panduan Komprehensif: Dari Dasar hingga Persiapan Kompetisi



Disusun Oleh:
Filza Buana Putra
2026

Kata Pengantar

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat-Nya sehingga **Modul Pelatihan ONMIPA 2026: Kombinatorika** ini dapat diselesaikan. Modul ini disusun sebagai materi pengayaan bagi mahasiswa dalam mempersiapkan diri menghadapi seleksi ONMIPA-PT, dengan fokus pada penguasaan teknik pencacahan, eksistensi, dan struktur diskrit yang menuntut kreativitas logika serta kecakapan pembuktian.

Isi modul ini meliputi topik utama yang disusun secara sistematis:

- **Pencacahan Dasar:** Prinsip dasar, permutasi, kombinasi, dan multiset.
- **Eksistensi:** *Pigeonhole Principle* dan argumen paritas.
- **Inklusi-Eksklusi:** Gabungan himpunan, *derangement*, dan fungsi surjektif.
- **Relasi Rekurensi:** Barisan Fibonacci dan relasi linier homogen.
- **Teori Graf:** Struktur dasar, Euler, Hamilton, dan Teorema Hall.
- **Fungsi Pembangkit:** Deret kuasa untuk masalah kombinasi dan permutasi.

Setiap bab menyajikan ringkasan materi, contoh soal dengan pembahasan teknis, serta latihan mandiri dengan terminologi standar literatur matematika internasional.

Semoga modul ini bermanfaat bagi mahasiswa dalam melatih strategi penyelesaian masalah. Kritik dan saran sangat diharapkan demi penyempurnaan di masa mendatang.

Pontianak, Maret 2026

Penulis

Daftar Isi

1	Permutasi dan Kombinasi (Prinsip Dasar)	1
1.1	Prinsip Penjumlahan, Perkalian, dan Pengurangan	1
1.1.1	Prinsip Penjumlahan (<i>The Addition Principle</i>)	1
1.1.2	Prinsip Perkalian (<i>The Multiplication Principle</i>)	1
1.1.3	Prinsip Pengurangan (<i>The Subtraction Principle</i>)	1
1.1.4	Contoh Soal	2
1.1.5	Latihan Soal	3
1.2	Prinsip Pembagian (<i>The Division Principle</i>)	3
1.2.1	Contoh Soal	3
1.2.2	Latihan Soal	4
1.3	Permutasi dan Kombinasi	4
1.3.1	Permutasi (Urutan Diperhatikan)	5
1.3.2	Kombinasi (Urutan Tidak Diperhatikan)	5
1.3.3	Contoh Soal	5
1.3.4	Latihan Soal	6
1.4	Pengaturan Benda Identik dan Berbeda (Multiset)	6
1.4.1	Permutasi Multiset	7
1.4.2	Kombinasi Multiset (Metode <i>Stars and Bars</i>)	7
1.4.3	Contoh Soal	7
1.4.4	Latihan Soal	8
1.5	Teorema Binomial dan Identitas Pascal	8
1.5.1	Teorema Binomial	8
1.5.2	Identitas Pascal dan Segitiga Pascal	9
1.5.3	Contoh Soal	9
1.5.4	Latihan Soal	10
2	Prinsip Eksistensi (Pigeonhole & Paritas)	11
2.1	The Pigeonhole Principle (Prinsip Sarang Merpati)	11
2.1.1	Bentuk Lemah (<i>Weak Form</i>)	11
2.1.2	Bentuk Kuat (<i>Strong Form</i>)	11
2.1.3	Contoh Soal	12
2.1.4	Latihan Soal	12
2.2	Argumen Paritas dalam Kombinatorika	13
2.2.1	Prinsip Dasar Paritas	13
2.2.2	Pewarnaan Papan Catur (<i>Chessboard Coloring</i>)	13
2.2.3	Contoh Soal	14

2.2.4	Latihan Soal	14
3	Prinsip Inklusi-Eksklusi (PIE)	16
3.1	Formulasi PIE untuk n Himpunan	16
3.1.1	Kasus Dua dan Tiga Himpunan	16
3.1.2	Bentuk Umum PIE	16
3.1.3	Contoh Soal	17
3.1.4	Latihan Soal	17
3.2	Aplikasi PIE: Derangement dan Fungsi Onto	18
3.2.1	Derangement (Pengacakan Total)	18
3.2.2	Jumlah Fungsi Onto (Surjektif)	18
3.2.3	Contoh Soal	18
3.2.4	Latihan Soal	19
4	Relasi Rekurensi	20
4.1	Barisan Fibonacci dan Aplikasinya	20
4.1.1	Aplikasi: Masalah Pengubinan (<i>Tiling</i>)	20
4.1.2	Contoh Soal	21
4.1.3	Latihan Soal	21
4.2	Rekurensi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan	21
4.2.1	Persamaan Karakteristik	22
4.2.2	Kasus Akar Berbeda (Orde 2)	22
4.2.3	Kasus Akar Kembar (Orde 2)	22
4.2.4	Contoh Soal	22
4.2.5	Latihan Soal	23
5	Pengantar Teori Graf	24
5.1	Definisi dan Struktur Dasar	24
5.1.1	Derajat Titik	24
5.1.2	Lintasan dan Konektivitas	24
5.1.3	Contoh Soal	25
5.1.4	Latihan Soal	25
5.2	Graf Eulerian dan Graf Hamiltonian	25
5.2.1	Graf Eulerian	25
5.2.2	Graf Hamiltonian	26
5.2.3	Contoh Soal	26
5.2.4	Latihan Soal	26
5.3	Matching dan Marriage Theorem	27
5.3.1	Graf Bipartit	27
5.3.2	Matching (Pencocokan)	27
5.3.3	Teorema Hall (Marriage Theorem)	27
5.3.4	Contoh Soal	27
5.3.5	Latihan Soal	28

6	Fungsi Pembangkit	30
6.1	Fungsi Pembangkit Biasa (Ordinary Generating Functions)	30
6.1.1	Beberapa Deret Penting	30
6.1.2	Aplikasi: Masalah Pemilihan	30
6.1.3	Latihan Soal	31
6.2	Fungsi Pembangkit Eksponensial (<i>Exponential GF</i>)	31
6.2.1	Deret Eksponensial Penting	32
6.2.2	Aplikasi: Konfigurasi Warna	32
6.2.3	Latihan Soal	32
7	Soal Latihan Akhir	34
7.1	Bagian I: Isian Singkat	34
7.2	Bagian II: Essay	35

Bab 1

Permutasi dan Kombinasi (Prinsip Dasar)

Pencacahan (*counting*) adalah fondasi utama dari kombinatorika. Sebelum mempelajari teknik yang lebih kompleks, kita harus memahami tiga aturan dasar yang mengatur bagaimana sebuah kejadian dapat dihitung secara logis dan sistematis.

1.1 Prinsip Penjumlahan, Perkalian, dan Pengurangan

1.1.1 Prinsip Penjumlahan (*The Addition Principle*)

Jika terdapat himpunan A dengan $|A|$ elemen dan himpunan B dengan $|B|$ elemen, serta A dan B adalah himpunan yang saling lepas ($A \cap B = \emptyset$), maka banyaknya cara untuk memilih satu elemen dari A atau B adalah:

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad (1.1)$$

Secara umum, untuk m buah himpunan yang saling lepas $A_1, A_2, \dots, A_m$, jumlah elemen dari gabungannya adalah $\sum_{i=1}^m |A_i|$.

1.1.2 Prinsip Perkalian (*The Multiplication Principle*)

Jika sebuah prosedur dapat dipecah menjadi k tahap, di mana tahap pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, tahap kedua dalam n_2 cara, dan seterusnya hingga tahap ke- k dapat dilakukan dalam n_k cara (dengan catatan jumlah cara pada setiap tahap tidak bergantung pada pilihan tahap sebelumnya), maka total prosedur tersebut dapat dilakukan dalam:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k \text{ cara.} \quad (1.2)$$

1.1.3 Prinsip Pengurangan (*The Subtraction Principle*)

Jika A adalah sebuah himpunan bagian dari himpunan semesta U , maka banyaknya elemen di A seringkali lebih mudah dihitung dengan mengurangi total

elemen di U dengan elemen yang tidak berada di A (komplemen A):

$$|A| = |U| - |A^c| \quad (1.3)$$

1.1.4 Contoh Soal

Contoh 1.1. Berapa banyak bilangan bulat positif antara 100 dan 999 (inklusif) yang semua digitnya berbeda?

Solusi: Kita memiliki tiga posisi digit: ratusan, puluhan, dan satuan.

- **Digit Ratusan:** Tidak boleh 0, maka ada 9 pilihan $\{1, 2, \dots, 9\}$.
- **Digit Puluhan:** Boleh angka 0, tetapi harus berbeda dari digit pertama, maka ada 9 pilihan.
- **Digit Satuan:** Harus berbeda dari digit ratusan dan puluhan, maka tersisa 8 pilihan.

Berdasarkan prinsip perkalian, totalnya adalah $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Contoh 1.2. Tentukan banyaknya pembagi positif dari bilangan $n = 120$.

Solusi: Pertama, kita lakukan faktorisasi prima: $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$. Setiap pembagi d dari 120 harus berbentuk $2^a \times 3^b \times 5^c$.

- Pilihan eksponen a adalah $\{0, 1, 2, 3\}$ (4 cara).
- Pilihan eksponen b adalah $\{0, 1\}$ (2 cara).
- Pilihan eksponen c adalah $\{0, 1\}$ (2 cara).

Berdasarkan prinsip perkalian, total pembagi adalah $4 \times 2 \times 2 = 16$.

Contoh 1.3. Sebuah papan catur berukuran 8×8 . Berapa banyak cara menempatkan dua buah benteng (*rook*), satu warna putih dan satu warna hitam, sedemikian sehingga mereka saling menyerang?

Solusi: Dua benteng saling menyerang jika berada di baris yang sama atau kolom yang sama.

1. Tempatkan benteng putih di mana saja pada papan: 64 cara.
2. Agar saling menyerang, benteng hitam harus berada di baris yang sama (7 kotak lain) atau kolom yang sama (7 kotak lain).
3. Berdasarkan prinsip penjumlahan, ada $7 + 7 = 14$ kotak bagi benteng hitam agar saling menyerang.

Total cara adalah $64 \times 14 = 896$.

1.1.5 Latihan Soal

1. Berapa banyak bilangan ganjil tiga digit yang tidak mengandung angka 7?
2. Tentukan banyaknya cara menyusun huruf-huruf dari kata "MATEMATIKA" jika huruf pertama harus huruf vokal.
3. Berapa banyak string biner dengan panjang 10 yang memiliki setidaknya satu angka 0?
4. Tentukan jumlah dari semua bilangan empat digit yang dapat dibentuk dari angka $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tanpa pengulangan digit.
5. Berapa banyak bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang semua digitnya adalah bilangan prima?

1.2 Prinsip Pembagian (*The Division Principle*)

Prinsip pembagian digunakan ketika kita menghitung suatu objek secara berlebihan (*overcounting*) dengan faktor yang tetap. Jika kita menghitung setiap objek sebanyak tepat k kali, maka kita harus membagi total hitungan tersebut dengan k untuk mendapatkan jumlah objek yang sebenarnya.

Definisi 1.1 (Prinsip Pembagian). *Jika sebuah himpunan S dicacah sedemikian rupa sehingga setiap elemen di dalamnya terhitung tepat sebanyak k kali, maka banyaknya elemen yang berbeda di dalam S adalah:*

$$|S| = \frac{\text{Total Hitungan}}{k} \quad (1.4)$$

Prinsip ini sering muncul dalam masalah simetri, seperti rotasi pada meja bundar atau ketika urutan dalam suatu pemilihan tidak dianggap penting.

1.2.1 Contoh Soal

Contoh 1.4. Berapa banyak cara menyusun 5 orang untuk duduk mengelilingi sebuah meja bundar? (Dua susunan dianggap sama jika satu susunan dapat diperoleh dari rotasi susunan lainnya).

Solusi:

1. Jika 5 orang tersebut duduk berjajar (linear), ada $5! = 120$ cara.
2. Namun, pada meja bundar, setiap susunan memiliki 5 variasi rotasi yang dianggap identik. Misalnya, susunan (A, B, C, D, E) akan terlihat sama dengan (E, A, B, C, D) jika meja diputar.
3. Karena setiap susunan unik telah terhitung sebanyak 5 kali dalam hitungan linear, maka berdasarkan prinsip pembagian:

$$\text{Total cara} = \frac{5!}{5} = 4! = 24.$$

Contoh 1.5. Dari 10 orang siswa, akan dipilih 3 orang untuk membentuk sebuah tim kecil. Berapa banyak tim yang dapat dibentuk?

Solusi:

1. Jika urutan pemilihan penting (seperti memilih Ketua, Sekretaris, Bendahara), maka ada $10 \times 9 \times 8 = 720$ cara.
2. Namun, dalam sebuah tim, urutan pemilihan $\{A, B, C\}$ sama saja dengan $\{B, A, C\}$ atau $\{C, B, A\}$.
3. Untuk setiap kelompok 3 orang, terdapat $3! = 6$ urutan berbeda yang sebenarnya merujuk pada tim yang sama.
4. Maka, setiap tim dihitung sebanyak 6 kali.

$$\text{Banyaknya tim} = \frac{720}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

1.2.2 Latihan Soal

1. Berapa banyak cara menyusun 6 kunci yang berbeda pada sebuah gelang kunci? (Catatan: Gelang kunci dapat dibalik/refleksi).
2. Terdapat 8 orang yang akan dibagi ke dalam 4 pasangan untuk bermain bulu tangkis ganda. Berapa banyak cara membentuk pasangan-pasangan tersebut?
3. Berapa banyak string yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "ANANA"? (Gunakan prinsip pembagian dengan menganggap semua huruf 'A' dan 'N' berbeda terlebih dahulu).
4. Sebuah poligon konveks memiliki n sisi. Berapa banyak diagonal yang dapat dibuat dari titik-titik sudut poligon tersebut?

1.3 Permutasi dan Kombinasi

Setelah memahami prinsip dasar, kita dapat menurunkan rumus untuk menghitung banyaknya cara memilih objek dari suatu himpunan yang elemennya berbeda satu sama lain. Perbedaan utama antara keduanya terletak pada apakah urutan pemilihan tersebut bermakna atau tidak.

1.3.1 Permutasi (Urutan Diperhatikan)

Permutasi adalah penyusunan r objek yang diambil dari n objek berbeda dengan memperhatikan urutan. Berdasarkan prinsip perkalian, kita memiliki n pilihan untuk posisi pertama, $n - 1$ untuk posisi kedua, hingga $n - r + 1$ untuk posisi ke- r .

Definisi 1.2 (Permutasi). *Banyaknya permutasi r objek dari n objek berbeda, dilambangkan dengan $P(n, r)$ atau P_r^n , adalah:*

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \quad (1.5)$$

Khusus untuk $r = n$, banyaknya cara menyusun seluruh objek adalah $n!$.

1.3.2 Kombinasi (Urutan Tidak Diperhatikan)

Kombinasi adalah pemilihan r objek dari n objek berbeda tanpa memperhatikan urutan. Dalam hal ini, himpunan $\{a, b\}$ dianggap sama dengan $\{b, a\}$.

Definisi 1.3 (Kombinasi). *Banyaknya kombinasi r objek dari n objek berbeda, dilambangkan dengan $C(n, r)$ atau $\binom{n}{r}$, adalah:*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!} \quad (1.6)$$

Hubungan antara keduanya sangat jelas melalui Prinsip Pembagian: Karena setiap kelompok r objek dapat disusun dalam $r!$ cara, maka:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

1.3.3 Contoh Soal

Contoh 1.6. Sebuah organisasi yang terdiri dari 15 anggota ingin memilih seorang ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Berapa banyak kemungkinan susunan pengurus yang dapat dibentuk?

Solusi: Karena jabatan memiliki tingkatan (ketua $\neq$ wakil), maka urutan penting. Ini adalah masalah permutasi 3 dari 15:

$$P(15, 3) = \frac{15!}{(15 - 3)!} = 15 \times 14 \times 13 = 2.730 \text{ cara.}$$

Contoh 1.7. Seorang siswa harus menjawab 8 dari 10 soal ujian yang diberikan. Berapa banyak cara siswa tersebut memilih soal yang akan dikerjakan?

Solusi: Urutan mengerjakan soal tidak mempengaruhi kumpulan soal yang dipilih. Ini adalah masalah kombinasi 8 dari 10:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ cara.}$$

Contoh 1.8. Berapa banyak string biner panjang n yang tepat memiliki k angka 1?

Solusi: Dari n posisi yang tersedia, kita hanya perlu memilih k posisi untuk ditempati angka 1. Sisanya secara otomatis diisi oleh angka 0. Banyaknya cara adalah $\binom{n}{k}$.

1.3.4 Latihan Soal

1. Berapa banyak cara menyusun 4 buku matematika yang berbeda, 3 buku fisika yang berbeda, dan 2 buku kimia yang berbeda di atas rak buku jika buku yang sejenis harus berdekatan?
2. Terdapat 10 titik di sebuah bidang datar sedemikian sehingga tidak ada tiga titik yang segaris (*collinear*). Berapa banyak segitiga yang dapat dibentuk dengan menggunakan titik-titik tersebut sebagai titik sudut?
3. Sebuah komite terdiri dari 5 pria dan 4 wanita. Akan dipilih sebuah delegasi yang terdiri dari 4 orang. Berapa banyak cara memilih delegasi tersebut jika harus terdiri dari tepat 2 pria dan 2 wanita?
4. Buktikan secara aljabar bahwa $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Berikan pula argumen logis mengapa identitas ini masuk akal secara kombinatorik.

1.4 Pengaturan Benda Identik dan Berbeda (Multiset)

Dalam pembahasan sebelumnya, kita mengasumsikan bahwa semua objek dalam suatu himpunan adalah berbeda. Namun, dalam banyak kasus, kita bekerja dengan koleksi objek di mana beberapa objek tidak dapat dibedakan satu sama lain. Koleksi seperti ini disebut sebagai *multiset*.

Definisi 1.4 (Multiset). Sebuah multiset S dapat direpresentasikan sebagai $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$, di mana a_i adalah jenis objek dan n_i adalah jumlah kemunculan (multiplisitas) dari objek tersebut. Total anggota multiset adalah $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

1.4.1 Permutasi Multiset

Banyaknya cara menyusun seluruh anggota multiset $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ secara linear adalah:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!} \quad (1.7)$$

Formula ini merupakan aplikasi langsung dari Prinsip Pembagian: kita menganggap semua n objek berbeda ($n!$), lalu membagi dengan banyaknya cara menyusun objek identik di dalam kelompoknya sendiri ($n_i!$).

1.4.2 Kombinasi Multiset (Metode *Stars and Bars*)

Seringkali kita diminta memilih r objek dari n jenis objek yang berbeda, di mana setiap jenis tersedia dalam jumlah yang tak terbatas (atau setidaknya sebanyak r). Ini setara dengan mencari banyaknya solusi bulat non-negatif dari persamaan:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r, \quad x_i \geq 0 \quad (1.8)$$

Banyaknya cara pemilihan tersebut adalah:

$$\binom{r+n-1}{r} \text{ atau } \binom{r+n-1}{n-1} \quad (1.9)$$

1.4.3 Contoh Soal

Contoh 1.9. Tentukan banyaknya cara menyusun huruf-huruf dari kata "MISSISSIPPI".

Solusi: Kata "MISSISSIPPI" terdiri dari 11 huruf dengan rincian: M = 1, I = 4, S = 4, P = 2. Banyaknya susunan berbeda adalah:

$$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34.650$$

Contoh 1.10. Toko roti menjual 4 jenis donat berbeda. Seseorang ingin membeli 10 buah donat. Berapa banyak kombinasi donat yang dapat dipilih?

Solusi: Ini adalah masalah kombinasi multiset dengan $n = 4$ jenis dan $r = 10$ pilihan. Misalkan x_i adalah jumlah donat jenis ke- i , maka: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$. Menggunakan formula *Stars and Bars*:

$$\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286.$$

Contoh 1.11. Berapa banyak solusi bulat positif ($x_i > 0$) untuk persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$?

Solusi: Agar $x_i \geq 1$, kita lakukan substitusi $y_i = x_i - 1$, sehingga $y_i \geq 0$. Persamaan menjadi: $(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) = 12 \implies y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$. Banyaknya solusi adalah:

$$\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165.$$

1.4.4 Latihan Soal

1. Berapa banyak susunan berbeda dari kata "COMBINATORICS"?
2. Sebuah kotak berisi bola merah, bola biru, dan bola hijau dalam jumlah yang sangat banyak. Berapa banyak cara memilih 15 bola dari kotak tersebut?
3. Tentukan banyaknya solusi bulat (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ dengan syarat $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 5$, dan $x_3 \geq 0$.
4. Berapa banyak cara menempatkan 7 buah apel yang identik ke dalam 4 keranjang yang berbeda jika setiap keranjang boleh kosong?
5. (*Challenge*) Tentukan banyaknya cara menyusun 5 buah bola identik ke dalam 3 kotak berbeda sedemikian sehingga tidak ada kotak yang berisi lebih dari 3 bola.

1.5 Teorema Binomial dan Identitas Pascal

Salah satu aplikasi paling kuat dari kombinasi adalah dalam ekspansi pangkat dari penjumlahan dua variabel, yang dikenal sebagai binomial.

1.5.1 Teorema Binomial

Teorema ini memberikan cara untuk mengekspansi bentuk $(x + y)^n$. Koefisien dari setiap suku dalam ekspansi ini adalah nilai kombinasi yang kita kenal.

Teorema 1.5 (Teorema Binomial). Untuk setiap bilangan bulat positif n dan variabel x, y , berlaku:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1.10)$$

di mana $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Argumen Kombinatorik: Ekspansi $(x + y)^n$ adalah hasil perkalian dari n buah faktor $(x + y)$. $(x + y)(x + y) \dots (x + y)$. Untuk mendapatkan suku $x^{n-k} y^k$, kita harus memilih variabel y dari tepat k faktor, dan sisanya $(n - k)$ faktor menyumbangkan variabel x . Banyaknya cara memilih k faktor dari n faktor yang tersedia adalah $\binom{n}{k}$.

1.5.2 Identitas Pascal dan Segitiga Pascal

Identitas Pascal adalah rumus rekursif yang memungkinkan kita menghitung nilai kombinasi tanpa menggunakan faktorial.

Teorema 1.6 (Identitas Pascal). Untuk bilangan bulat n dan k dengan $1 \leq k \leq n$, berlaku:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (1.11)$$

Bukti Kombinatorik: Misalkan kita memiliki sebuah himpunan S dengan n elemen, dan salah satu elemennya kita beri label khusus a . Kita ingin memilih subhimpunan berukuran k dari S .

1. Jika elemen a **tidak dipilih**, maka kita harus memilih k elemen dari $n - 1$ elemen yang tersisa. Ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-1}{k}$ cara.
2. Jika elemen a **dipilih**, maka kita hanya perlu memilih $k - 1$ elemen lagi dari $n - 1$ elemen yang tersisa. Ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-1}{k-1}$ cara.

Karena kedua kasus ini saling lepas, maka total cara memilih adalah jumlah dari keduanya.

1.5.3 Contoh Soal

Contoh 1.12. Tentukan koefisien dari $x^{12}y^{13}$ dalam ekspansi $(2x - 3y)^{25}$.

Solusi: Berdasarkan Teorema Binomial, suku umum dari $(ax + by)^n$ adalah $\binom{n}{k}(ax)^{n-k}(by)^k$. Di sini $n = 25$, $n - k = 12$, dan $k = 13$. Suku yang dicari adalah:

$$\binom{25}{13}(2x)^{12}(-3y)^{13} = \binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}x^{12}y^{13}$$

Koefisiennya adalah $-\binom{25}{13} \cdot 2^{12} \cdot 3^{13}$.

Contoh 1.13. Gunakan argumen kombinatorik untuk membuktikan bahwa:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solusi: Ruas kiri menyatakan total banyaknya cara memilih subhimpunan dengan ukuran $0, 1, 2, \dots, n$ dari sebuah himpunan berukuran n . Dengan kata lain, ruas kiri adalah jumlah total seluruh subhimpunan dari himpunan tersebut (himpunan kuasa). Ruas kanan, 2^n , adalah banyaknya cara membuat subhimpunan dengan logika: untuk setiap elemen, kita punya 2 pilihan (masuk ke subhimpunan atau tidak). Karena ada n elemen, maka ada $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ cara. Jadi, kedua ruas terbukti sama.

1.5.4 Latihan Soal

1. Tentukan suku konstanta (suku yang tidak mengandung x) pada ekspansi $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.
2. Buktikan *Vandermonde's Identity*: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$ menggunakan argumen kombinatorik.
3. Buktikan identitas *Hockey-stick*: $\sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ untuk $n, r \in \mathbb{N}$ dan $n \geq r$.
4. Tentukan nilai dari $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. (Petunjuk: Gunakan turunan dari teorema binomial atau argumen memilih ketua tim dari subhimpunan).

Bab 2

Prinsip Eksistensi (Pigeonhole & Paritas)

Dalam kombinatorika, kita sering kali tidak diminta untuk menghitung berapa banyak cara sesuatu terjadi, melainkan cukup membuktikan bahwa sesuatu *pasti* terjadi. Dua alat utama untuk ini adalah Prinsip Sarang Merpati dan Argumen Paritas.

2.1 The Pigeonhole Principle (Prinsip Sarang Merpati)

Prinsip ini secara intuitif menyatakan bahwa jika kita mencoba memasukkan terlalu banyak objek ke dalam wadah yang terlalu sedikit, maka setidaknya satu wadah akan berisi lebih dari satu objek.

2.1.1 Bentuk Lemah (*Weak Form*)

Teorema 2.1. *Jika $n + 1$ ekor burung merpati dimasukkan ke dalam n buah sangkar, maka setidaknya ada satu sangkar yang berisi dua ekor merpati atau lebih.*

Secara formal dalam terminologi fungsi: Jika $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi dari himpunan berhingga A ke B dengan $|A| > |B|$, maka f bukan fungsi injektif (terdapat $a_1, a_2 \in A$ sehingga $f(a_1) = f(a_2)$).

2.1.2 Bentuk Kuat (*Strong Form*)

Teorema 2.2. *Jika n buah objek dimasukkan ke dalam k buah wadah, maka setidaknya ada satu wadah yang berisi sekurang-kurangnya:*

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \tag{2.1}$$

objek (di mana $\lceil \cdot \rceil$ adalah fungsi ceiling).

—

2.1.3 Contoh Soal

Contoh 2.1. Buktikan bahwa di antara 13 orang, setidaknya ada dua orang yang lahir di bulan yang sama.

Solusi: Di sini, orang adalah "merpati" ($n = 13$) dan bulan adalah "sangkar" ($k = 12$). Karena $13 > 12$, berdasarkan Prinsip Sarang Merpati, setidaknya ada $\lceil 13/12 \rceil = 2$ orang yang lahir pada bulan yang sama.

Contoh 2.2. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Jika kita memilih $n + 1$ bilangan dari S , buktikan bahwa selalu ada dua bilangan yang dipilih sedemikian sehingga salah satunya membagi bilangan yang lain.

Solusi: Setiap bilangan bulat positif x dapat dituliskan dalam bentuk $x = 2^k \cdot m$, di mana m adalah bilangan ganjil (bagian ganjil terbesar dari x).

- Bilangan ganjil yang mungkin dalam rentang $\{1, 2, \dots, 2n\}$ adalah $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$.
- Ada tepat n buah bilangan ganjil di dalam rentang tersebut.
- Jika kita memilih $n + 1$ bilangan, maka menurut Prinsip Sarang Merpati, setidaknya ada dua bilangan yang memiliki "bagian ganjil" m yang sama.

Misalkan dua bilangan tersebut adalah $x_1 = 2^{k_1} \cdot m$ dan $x_2 = 2^{k_2} \cdot m$. Jika $k_1 < k_2$, maka x_1 membagi x_2 . Jika $k_2 < k_1$, maka x_2 membagi x_1 .

2.1.4 Latihan Soal

1. Berapa jumlah minimum orang yang diperlukan untuk menjamin bahwa setidaknya ada 5 orang yang lahir pada hari yang sama (misal: sama-sama hari Senin)?
2. Buktikan bahwa di dalam sebuah pesta yang dihadiri oleh n orang ($n \geq 2$), selalu terdapat setidaknya dua orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama di antara para tamu tersebut.
3. Diberikan 5 titik di dalam sebuah persegi berukuran 2×2 . Buktikan bahwa terdapat setidaknya dua titik yang jaraknya tidak lebih dari $\sqrt{2}$. (Petunjuk: Bagilah persegi menjadi 4 bagian yang lebih kecil).
4. Tunjukkan bahwa dari sebarang 6 bilangan bulat, selalu ada dua bilangan yang selisihnya habis dibagi 5.
5. (Erdős–Szekeres Theorem - Kasus Sederhana) Buktikan bahwa di antara $n^2 + 1$ bilangan real berbeda, selalu terdapat sub-barisan monoton (naik atau turun) dengan panjang $n + 1$.

2.2 Argumen Paritas dalam Kombinatorika

Paritas mengacu pada sifat keganjilan (*oddness*) atau kegenapan (*evenness*) dari suatu bilangan bulat. Dalam banyak masalah eksistensi, kita dapat menunjukkan bahwa suatu konfigurasi tidak mungkin dicapai dengan membuktikan bahwa paritas dari status awal dan status akhir tidak pernah bisa bersesuaian.

2.2.1 Prinsip Dasar Paritas

Beberapa aturan aritmetika paritas yang fundamental:

- $\text{Ganjil} \pm \text{Ganjil} = \text{Genap}$
- $\text{Ganjil} \pm \text{Genap} = \text{Ganjil}$
- $\text{Genap} \pm \text{Genap} = \text{Genap}$
- $(\text{Ganjil}) \times (\text{Ganjil}) = \text{Ganjil}$
- $(\text{Ganjil}) \times (\text{Genap}) = \text{Genap}$

2.2.2 Pewarnaan Papan Catur (*Chessboard Coloring*)

Banyak masalah paritas yang melibatkan papan catur atau kisi-kisi (*grid*) dapat diselesaikan dengan memberikan warna hitam dan putih secara berselang-seling. Ini adalah bentuk visual dari argumen paritas.

Teorema 2.3. *Jika sebuah papan catur 8×8 dihilangkan dua kotak pojoknya yang berlawanan (misal kiri atas dan kanan bawah), maka papan tersebut tidak dapat ditutupi secara sempurna oleh 31 domino berukuran 2×1 .*

Bukti: Setiap domino 2×1 akan selalu menutupi tepat satu kotak putih dan satu kotak hitam, terlepas dari bagaimana ia diletakkan.

- Papan catur standar memiliki 32 kotak putih dan 32 kotak hitam.
- Dua kotak pojok yang berlawanan selalu memiliki warna yang sama (misal keduanya putih).
- Maka, papan yang dimodifikasi memiliki 30 kotak putih dan 32 kotak hitam (atau sebaliknya).
- Karena 31 domino memerlukan 31 kotak putih dan 31 kotak hitam, maka penutupan (*tiling*) tersebut tidak mungkin dilakukan.

—

2.2.3 Contoh Soal

Contoh 2.3. Sebuah algoritma dimulai dengan menuliskan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ di papan tulis. Setiap langkah, kita menghapus dua bilangan a dan b , lalu menuliskan $|a - b|$ sebagai gantinya. Proses ini berlanjut sampai hanya tersisa satu bilangan. Mungkinkah bilangan terakhir yang tersisa adalah 0?

Solusi: Perhatikan jumlah seluruh bilangan di papan tulis, $S = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$ (Ganjil). Ketika kita mengganti a dan b dengan $|a - b|$, perubahan jumlah totalnya adalah: $\Delta S = (S - a - b + |a - b|) - S = |a - b| - (a + b)$.

- Karena $|a - b| \equiv a + b \pmod{2}$, maka ΔS selalu genap.
- Artinya, paritas dari jumlah total bilangan di papan tulis bersifat **invarian** (tetap).
- Karena jumlah awal (55) adalah ganjil, maka bilangan terakhir yang tersisa **harus ganjil**.
- Jadi, tidak mungkin bilangan terakhir yang tersisa adalah 0 (genap).

Contoh 2.4. Dapatkah sebuah kuda catur (*knight*) melompat dari kotak $a1$ dan berakhir di kotak $h8$ dalam tepat 63 langkah dengan mengunjungi setiap kotak di papan catur 8×8 tepat satu kali?

Solusi: Setiap kali kuda melompat, ia selalu berpindah ke kotak dengan warna yang berbeda.

- Langkah 1: Pindah ke warna yang berbeda dari asal.
- Langkah 2: Kembali ke warna yang sama dengan asal.
- Langkah ke- k : Jika k ganjil, kuda berada di kotak dengan warna berbeda dari asal. Jika k genap, kuda berada di kotak dengan warna yang sama dengan asal.

Kotak $a1$ (asal) dan $h8$ (tujuan) memiliki warna yang sama pada papan catur 8×8 . Maka, untuk mencapai $h8$, diperlukan jumlah langkah yang **genap**. Karena 63 adalah ganjil, perjalanan tersebut tidak mungkin dilakukan.

2.2.4 Latihan Soal

1. Tujuh buah gelas diletakkan di atas meja, semuanya dalam posisi terbalik (*upside down*). Dalam satu langkah, Anda diperbolehkan membalik tepat dua gelas sekaligus. Mungkinkah semua gelas berakhir dalam posisi tegak?
2. Di dalam sebuah lingkaran, tertulis 10 angka 0 dan 11 angka 1. Anda boleh menghapus dua angka sembarang; jika kedua angka itu sama, tuliskan sebuah angka 0; jika berbeda, tuliskan sebuah angka 1. Angka apakah yang tersisa terakhir kali?

3. (*Mutilated Chessboard*) Buktikan bahwa papan berukuran 10×10 tidak dapat ditutupi oleh tetrominos berbentuk huruf T (masing-masing menutupi 4 kotak).
4. Terdapat 100 lampu yang semuanya mati. Setiap langkah, Anda boleh menekan saklar untuk mengubah status tepat 3 lampu (mati jadi nyala, nyala jadi mati). Mungkinkah semua lampu menjadi menyala?

Bab 3

Prinsip Inklusi-Eksklusi (PIE)

Dalam Bab 1, kita mempelajari bahwa $|A \cup B| = |A| + |B|$ jika $A \cap B = \emptyset$. Namun, jika kedua himpunan memiliki irisan, maka menjumlahkan $|A|$ dan $|B|$ akan menghitung elemen di $A \cap B$ sebanyak dua kali. Oleh karena itu, kita perlu mengurangi satu kali irisan tersebut. Prinsip Inklusi-Eksklusi memberikan formula umum untuk kasus n himpunan.

3.1 Formulasi PIE untuk n Himpunan

3.1.1 Kasus Dua dan Tiga Himpunan

Untuk dua himpunan A dan B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (3.1)$$

Untuk tiga himpunan A, B , dan C :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \quad (3.2)$$

3.1.2 Bentuk Umum PIE

Secara umum, untuk himpunan-himpunan berhingga $A_1, A_2, \dots, A_n$, banyaknya elemen pada gabungan mereka adalah:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (3.3)$$

Dalam notasi yang lebih ringkas:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| \quad (3.4)$$

—

3.1.3 Contoh Soal

Contoh 3.1. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 sampai 100 (inklusif) yang habis dibagi 3, 5, atau 7?

Solusi: Misalkan A, B, C berturut-turut adalah himpunan bilangan yang habis dibagi 3, 5, dan 7.

- $|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33, |B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20, |C| = \lfloor 100/7 \rfloor = 14.$
- $|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6, |A \cap C| = \lfloor 100/21 \rfloor = 4, |B \cap C| = \lfloor 100/35 \rfloor = 2.$
- $|A \cap B \cap C| = \lfloor 100/105 \rfloor = 0.$

Maka, $|A \cup B \cup C| = (33 + 20 + 14) - (6 + 4 + 2) + 0 = 67 - 12 = 55.$

Contoh 3.2. Tentukan banyaknya solusi bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ dengan syarat $0 \leq x_i \leq 6$ untuk setiap $i = 1, 2, 3.$

Solusi: Misalkan S adalah himpunan semua solusi bulat non-negatif. $|S| = \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{2} = 136.$ Misalkan P_i adalah kondisi di mana $x_i \geq 7$ (melanggar syarat $x_i \leq 6$). Kita ingin mencari $|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$

- Untuk $|A_1|$: $x_1 \geq 7$, maka $x'_1 + x_2 + x_3 = 15 - 7 = 8.$ Banyak solusi: $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{2} = 45.$ (Sama untuk $|A_2|$ dan $|A_3|$).
- Untuk $|A_1 \cap A_2|$: $x_1 \geq 7, x_2 \geq 7$, maka $x'_1 + x'_2 + x_3 = 15 - 14 = 1.$ Banyak solusi: $\binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = 3.$ (Sama untuk semua pasangan).
- Untuk $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$: $x_1, x_2, x_3 \geq 7 \implies 21 > 15$, maka banyak solusi: 0.

Banyak solusi yang melanggar: $3(45) - 3(3) + 0 = 135 - 9 = 126.$ Banyak solusi yang memenuhi syarat: $136 - 126 = 10.$

3.1.4 Latihan Soal

1. Berapa banyak bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, maupun 5?
2. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \leq 500$ sedemikian sehingga n relatif prima terhadap 500.
3. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf dari kata "MATEMATIKA" sedemikian sehingga tidak ada dua huruf 'A' yang berdekatan? (Gunakan PIE sebagai pembanding metode sela).
4. Tentukan banyaknya fungsi surjektif (onto) dari himpunan A dengan n elemen ke himpunan B dengan m elemen.

3.2 Aplikasi PIE: Derangement dan Fungsi Onto

3.2.1 Derangement (Pengacakan Total)

Sebuah *derangement* adalah permutasi dari elemen-elemen suatu himpunan sedemikian sehingga tidak ada satu pun elemen yang menempati posisi aslinya. Contohnya, jika posisi asli adalah $(1, 2, 3)$, maka $(2, 3, 1)$ adalah sebuah *derangement*, namun $(2, 1, 3)$ bukan karena angka 3 tetap di posisi ketiga.

Kita melambangkan banyaknya *derangement* dari n elemen dengan D_n .

Teorema 3.1. Banyaknya *derangement* dari n objek berbeda adalah:

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (3.5)$$

Bukti: Misalkan S adalah himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$, maka $|S| = n!$. Misalkan A_i adalah himpunan permutasi di mana elemen ke- i berada di posisi aslinya (*fixed point*). Kita ingin mencari:

$$D_n = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

Menggunakan PIE, kita peroleh bahwa $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, dan seterusnya. Karena ada $\binom{n}{k}$ cara memilih k buah irisan, maka:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} 0!$$

Substitusi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ akan menghasilkan formula D_n di atas.

3.2.2 Jumlah Fungsi Onto (Surjektif)

Misalkan terdapat himpunan A dengan n elemen dan B dengan m elemen ($n \geq m$). Kita ingin menghitung banyaknya fungsi $f : A \rightarrow B$ yang bersifat surjektif.

Teorema 3.2. Banyaknya fungsi onto dari himpunan berukuran n ke himpunan berukuran m adalah:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n \quad (3.6)$$

Strategi: Kita menghitung total fungsi (m^n) lalu mengurangnya dengan fungsi-fungsi yang jangkauannya (*range*) tidak mencakup seluruh elemen B menggunakan PIE.

—

3.2.3 Contoh Soal

Contoh 3.3. Terdapat 5 orang pria yang masing-masing menitipkan topinya di sebuah penitipan. Saat pulang, petugas memberikan topi secara acak kepada mereka. Berapa banyak cara agar tidak ada satu pun pria yang menerima topi miliknya sendiri?

Solusi: Ini adalah masalah D_5 .

$$D_5 = 5! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) = 120 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right)$$

$$D_5 = 60 - 20 + 5 - 1 = 44 \text{ cara.}$$

Contoh 3.4. Berapa banyak cara menempatkan 6 bola berbeda ke dalam 3 kotak berbeda sedemikian sehingga tidak ada kotak yang kosong?

Solusi: Ini setara dengan mencari jumlah fungsi onto dari himpunan berukuran $n = 6$ ke $m = 3$.

$$\text{Total} = \binom{3}{0} 3^6 - \binom{3}{1} 2^6 + \binom{3}{2} 1^6$$

$$\text{Total} = 1(729) - 3(64) + 3(1) = 729 - 192 + 3 = 540 \text{ cara.}$$

—

3.2.4 Latihan Soal

1. Hitunglah nilai D_6 . Periksa apakah benar bahwa D_n adalah bilangan bulat terdekat dari $n!/e$.
2. Sepuluh pucuk surat ditujukan kepada 10 orang yang berbeda. Jika surat dimasukkan ke dalam amplop secara acak, berapa probabilitas tepat 9 surat masuk ke amplop yang benar? (*Hati-hati, ini pertanyaan jebakan*).
3. Tunjukkan bahwa jumlah fungsi onto dari n elemen ke n elemen adalah $n!$. Hubungkan ini dengan konsep derangement.
4. Sebuah hotel memiliki 4 kamar kosong. Datanglah 7 orang tamu yang akan menginap. Berapa banyak cara mendistribusikan tamu tersebut ke kamar-kamar yang ada jika setiap kamar harus berisi minimal satu orang?

Bab 4

Relasi Rekurensi

Banyak masalah pencacahan yang sulit diselesaikan dengan rumus kombinasi statis, namun menjadi sangat mudah jika kita melihat bagaimana solusi untuk n objek berhubungan dengan solusi untuk $n - 1$ atau $n - 2$ objek. Hubungan inilah yang kita sebut sebagai relasi rekurensi.

4.1 Barisan Fibonacci dan Aplikasinya

Barisan Fibonacci $\{F_n\}$ didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{untuk } n \geq 2 \quad (4.1)$$

dengan nilai awal $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$. Suku-suku pertamanya adalah $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

4.1.1 Aplikasi: Masalah Pengubinan (*Tiling*)

Salah satu cara paling intuitif untuk memahami rekurensi adalah melalui masalah pengubinan.

Contoh 4.1. Tentukan banyaknya cara untuk menutupi papan berukuran $2 \times n$ dengan menggunakan domino berukuran 2×1 .

Solusi: Misalkan a_n adalah banyaknya cara menutupi papan $2 \times n$.

- Jika kita meletakkan satu domino secara **vertikal** di ujung kanan, maka tersisa papan berukuran $2 \times (n - 1)$ yang bisa ditutupi dalam a_{n-1} cara.
- Jika kita meletakkan satu domino secara **horizontal** di ujung kanan, maka kita *harus* meletakkan satu lagi domino horizontal tepat di atas atau di bawahnya agar papan tertutup. Ini menyisakan papan berukuran $2 \times (n - 2)$ yang bisa ditutupi dalam a_{n-2} cara.

Oleh karena itu, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dengan mengecek nilai awal: - Untuk $n = 1$, hanya ada 1 cara (1 domino vertikal), maka $a_1 = 1$. - Untuk $n = 2$, ada 2 cara (2 vertikal atau 2 horizontal), maka $a_2 = 2$. Terlihat bahwa a_n mengikuti pola barisan Fibonacci (dengan pergeseran indeks, $a_n = F_{n+1}$).

—

4.1.2 Contoh Soal

Contoh 4.2. Berapa banyak string biner dengan panjang n yang tidak mengandung dua angka '1' yang berurutan?

Solusi: Misalkan b_n adalah banyaknya string biner panjang n yang memenuhi syarat tersebut.

- Jika string berakhir dengan '0', maka $n - 1$ karakter sebelumnya bisa berupa string apa saja yang memenuhi syarat. Ada b_{n-1} cara.
- Jika string berakhir dengan '1', maka karakter ke- $(n - 1)$ harus '0'. Ini menyisakan $n - 2$ karakter pertama yang bisa berupa string apa saja yang memenuhi syarat. Ada b_{n-2} cara.

Relasi rekurensinya adalah $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. Nilai awal: $b_1 = 2$ (string '0', '1'), $b_2 = 3$ (string '00', '01', '10').

Contoh 4.3. Diberikan sebuah tangga dengan n anak tangga. Seseorang dapat melangkah naik 1 atau 2 anak tangga sekaligus. Berapa banyak cara orang tersebut mencapai puncak?

Solusi: Misalkan s_n adalah banyaknya cara. Untuk mencapai anak tangga ke- n , langkah terakhir bisa berasal dari anak tangga ke- $(n - 1)$ dengan 1 langkah, atau dari anak tangga ke- $(n - 2)$ dengan 2 langkah sekaligus. Maka, $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. Ini kembali menghasilkan pola Fibonacci.

4.1.3 Latihan Soal

1. Hitunglah banyaknya cara menyusun string yang terdiri dari huruf $\{A, B, C\}$ dengan panjang n sedemikian sehingga tidak ada huruf 'A' yang berurutan.
2. Tentukan banyaknya subhimpunan dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang tidak mengandung dua bilangan bulat yang berurutan.
3. Sebuah koin dilempar n kali. Berapa banyak urutan munculnya angka (A) dan gambar (G) yang tidak mengandung tiga angka berturut-turut? (Tentukan relasi rekurensinya).
4. Buktikan menggunakan induksi matematika atau argumen kombinatorik bahwa:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

4.2 Rekurensi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Sebuah relasi rekurensi linier homogen berorde k memiliki bentuk umum:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \quad (4.2)$$

di mana c_i adalah konstanta dan $c_k \neq 0$. Untuk menyelesaikan relasi ini, kita mencari solusi berbentuk $a_n = r^n$.

4.2.1 Persamaan Karakteristik

Substitusi $a_n = r^n$ ke dalam relasi rekurensi menghasilkan **persamaan karakteristik**:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0 \quad (4.3)$$

4.2.2 Kasus Akar Berbeda (Orde 2)

Jika persamaan karakteristik $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ memiliki dua akar real berbeda r_1 dan r_2 , maka solusi umum dari relasi rekurensi adalah:

$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \quad (4.4)$$

Nilai konstanta α dan β ditentukan menggunakan nilai awal (syarat batas) a_0 dan a_1 .

4.2.3 Kasus Akar Kembar (Orde 2)

Jika persamaan karakteristik memiliki akar kembar $r_1 = r_2 = r$, maka solusi umumnya adalah:

$$a_n = \alpha r^n + \beta n r^n = (\alpha + \beta n) r^n \quad (4.5)$$

4.2.4 Contoh Soal

Contoh 4.4. Tentukan rumus eksplisit untuk barisan Fibonacci yang didefinisikan oleh $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dengan $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$.

Solusi: Persamaan karakteristiknya adalah $r^2 - r - 1 = 0$. Menggunakan rumus kuadrat, kita dapatkan akar-akarnya:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Solusi umum: $F_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Menggunakan nilai awal:

- Untuk $F_0 = 0 \implies \alpha + \beta = 0 \implies \beta = -\alpha$.
- Untuk $F_1 = 1 \implies \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \alpha \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \implies \alpha \sqrt{5} = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Maka didapat **Formula Binet**:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Contoh 4.5. Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik: $r^2 - 6r + 9 = 0 \implies (r - 3)^2 = 0$. Akar kembar $r = 3$. Solusi umum: $a_n = (\alpha + \beta n)3^n$.

- $a_0 = 1 \implies (\alpha + 0)3^0 = 1 \implies \alpha = 1$.
- $a_1 = 6 \implies (1 + \beta)3^1 = 6 \implies 1 + \beta = 2 \implies \beta = 1$.

Rumus eksplisit: $a_n = (1 + n)3^n$.

4.2.5 Latihan Soal

1. Selesaikan relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$.
2. Tentukan rumus eksplisit untuk barisan yang memenuhi $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
3. Misalkan h_n adalah banyaknya cara menyusun menara setinggi n menggunakan balok merah setinggi 1 unit, balok biru setinggi 1 unit, dan balok hijau setinggi 2 unit. Tentukan relasi rekurensinya dan cari rumus eksplisitnya.
4. Carilah solusi umum untuk rekurensi orde tiga: $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$.

Bab 5

Pengantar Teori Graf

Teori graf menyediakan kerangka kerja visual dan matematis untuk mempelajari relasi antar objek. Sebuah graf dapat merepresentasikan apa saja, mulai dari jaringan komputer, struktur molekul, hingga hubungan pertemanan.

5.1 Definisi dan Struktur Dasar

Definisi 5.1 (Graf). Sebuah graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tak kosong V yang berisi titik-titik (*vertices*) dan himpunan E yang berisi sisi-sisi (*edges*), di mana setiap sisi menghubungkan dua titik di V .

5.1.1 Derajat Titik

Derajat dari suatu titik v , dilambangkan dengan $d(v)$, adalah banyaknya sisi yang terhubung pada titik tersebut.

Teorema 5.2 (Handshaking Lemma). Untuk setiap graf $G = (V, E)$, jumlah derajat semua titik adalah dua kali jumlah sisinya:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (5.1)$$

Konsekuensi: Dalam setiap graf, jumlah titik yang memiliki derajat ganjil haruslah genap.

5.1.2 Lintasan dan Konektivitas

- **Walk:** Urutan selang-seling titik dan sisi $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n$.
- **Path (Lintasan):** *Walk* di mana semua titik yang dikunjungi berbeda.
- **Cycle (Siklus):** Lintasan tertutup di mana titik awal sama dengan titik akhir ($v_0 = v_n$).
- **Connected (Terhubung):** Sebuah graf disebut terhubung jika untuk setiap dua titik di V , terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya.

—

5.1.3 Contoh Soal

Contoh 5.1. Mungkinkah terdapat sebuah graf dengan 7 titik di mana masing-masing titik memiliki derajat tepat 3?

Solusi: Gunakan *Handshaking Lemma*. Jika ada 7 titik berderajat 3, maka total derajatnya adalah $7 \times 3 = 21$. Berdasarkan teorema, jumlah derajat haruslah $2|E|$, yang berarti harus bilangan genap. Karena 21 adalah ganjil, maka graf tersebut tidak mungkin ada.

Contoh 5.2. Sebuah graf memiliki n titik dan setiap titik memiliki derajat minimal $(n - 1)/2$. Buktikan bahwa graf tersebut harus terhubung.

Solusi: Gunakan kontradiksi. Andaikan graf tidak terhubung, maka terdapat setidaknya dua komponen, C_1 dan C_2 . Misalkan $|C_1| = k$ dan $|C_2| = n - k$. Derajat maksimum suatu titik di C_1 adalah $k - 1$. Maka $k - 1 \geq (n - 1)/2$. Derajat maksimum suatu titik di C_2 adalah $(n - k) - 1$. Maka $n - k - 1 \geq (n - 1)/2$. Jika kita jumlahkan kedua pertidaksamaan: $(k - 1) + (n - k - 1) \geq n - 1 \implies n - 2 \geq n - 1$. Ini adalah kontradiksi. Jadi, graf tersebut harus terhubung.

5.1.4 Latihan Soal

1. Buktikan bahwa dalam sebuah kelompok berisi 6 orang, selalu terdapat setidaknya 3 orang yang saling kenal atau 3 orang yang saling tidak kenal satu sama lain. (*Petunjuk: Gunakan graf dan prinsip Sarang Merpati*).
2. Sebuah graf memiliki 10 titik dan 25 sisi. Jika derajat setiap titik adalah 4 atau 6, berapa banyak titik yang berderajat 4?
3. Buktikan bahwa setiap graf sederhana dengan n titik ($n \geq 2$) memiliki setidaknya dua titik dengan derajat yang sama.
4. Tunjukkan bahwa jika sebuah graf memiliki tepat dua titik berderajat ganjil, maka harus ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

5.2 Graf Eulerian dan Graf Hamiltonian

5.2.1 Graf Eulerian

Sebuah graf dikatakan memiliki **lintasan Euler** jika terdapat lintasan yang melalui setiap **sisi** tepat satu kali. Jika lintasan tersebut tertutup (kembali ke titik awal), maka disebut **Sirkuit Euler**.

Teorema 5.3 (Teorema Euler). *Sebuah graf terhubung G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika setiap titik di G memiliki derajat genap.*

Teorema 5.4. *Sebuah graf terhubung G memiliki lintasan Euler (namun bukan sirkuit) jika dan hanya jika G memiliki tepat dua titik berderajat ganjil.*

5.2.2 Graf Hamiltonian

Sebuah graf dikatakan memiliki **lintasan Hamilton** jika terdapat lintasan yang melalui setiap **titik** tepat satu kali. Jika lintasan tersebut tertutup, disebut **Siklus Hamilton**.

Berbeda dengan graf Eulerian, tidak ada syarat perlu dan cukup yang "sederhana" untuk menentukan apakah suatu graf bersifat Hamiltonian (ini termasuk masalah NP-lengkap). Namun, terdapat beberapa syarat cukup, salah satunya adalah Teorema Dirac.

Teorema 5.5 (Teorema Dirac). *Jika G adalah graf sederhana dengan n titik ($n \geq 3$) dan setiap titik v memenuhi $d(v) \geq n/2$, maka G memiliki siklus Hamilton.*

—

5.2.3 Contoh Soal

Contoh 5.3. Diberikan papan catur berukuran 3×4 . Mungkinkah seekor kuda catur (*knight*) bergerak mengunjungi setiap kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak asal?

Solusi: Ini adalah masalah mencari siklus Hamilton pada graf yang merepresentasikan gerakan kuda.

- Papan 3×4 memiliki 12 kotak (6 hitam, 6 putih).
- Gerakan kuda selalu berpindah warna. Untuk siklus Hamilton (panjang 12), kuda harus berpindah: Putih $\rightarrow$ Hitam $\rightarrow$ Putih $\cdots \rightarrow$ Hitam $\rightarrow$ (Kembali ke Putih).
- Namun, pada papan 3×4 , perhatikan kotak-kotak sudut. Jika kita memetakan grafnya, akan terlihat bahwa titik-titik tertentu memiliki derajat yang sangat kecil sehingga tidak memungkinkan terbentuknya siklus yang mencakup seluruh titik. (Secara umum, papan $m \times n$ tidak memiliki siklus Hamilton jika m dan n keduanya ganjil, atau jika $m = 3$ dan $n = 4$).

—

5.2.4 Latihan Soal

1. Tentukan apakah graf berikut memiliki sirkuit Euler, lintasan Euler, atau tidak keduanya:
 - Graf lengkap K_n untuk $n = 4, 5, 6$.
 - Graf bipartit lengkap $K_{2,3}$.
2. (*Persoalan Jembatan Königsberg*) Tunjukkan melalui teori graf mengapa penduduk kota Königsberg tidak bisa berjalan melewati tujuh jembatan mereka masing-masing tepat satu kali dan kembali ke tempat semula.

3. Buktikan bahwa jika sebuah graf memiliki sirkuit Euler, maka graf tersebut tidak mungkin memiliki *bridge* (sisi yang jika dihapus akan membuat graf menjadi tidak terhubung).
4. Berikan contoh graf yang memiliki siklus Hamilton tetapi tidak memiliki sirkuit Euler.
5. Berikan contoh graf yang memiliki sirkuit Euler tetapi tidak memiliki siklus Hamilton.

5.3 Matching dan Marriage Theorem

Masalah pencocokan (*matching*) berkaitan dengan pemilihan sisi-sisi pada graf sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang berbagi titik yang sama. Masalah ini paling sering dipelajari dalam konteks **graf bipartit**.

5.3.1 Graf Bipartit

Sebuah graf G dikatakan bipartit jika himpunan titik V dapat dipartisi menjadi dua himpunan tidak kosong X and Y sedemikian sehingga setiap sisi di E menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y .

5.3.2 Matching (Pencocokan)

Definisi 5.6. *Matching M pada graf G adalah subhimpunan dari sisi-sisi E sedemikian sehingga tidak ada dua sisi di M yang bertemu pada titik yang sama. Sebuah complete matching dari X ke Y adalah matching yang mencakup setiap titik di X .*

5.3.3 Teorema Hall (Marriage Theorem)

Philip Hall memberikan syarat perlu dan cukup agar sebuah graf bipartit memiliki *complete matching* dari X ke Y .

Teorema 5.7 (Teorema Hall). *Misalkan $G = (X \cup Y, E)$ adalah graf bipartit. Terdapat complete matching yang menjenuhkan setiap titik di X jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan $S \subseteq X$, berlaku:*

$$|N(S)| \geq |S| \quad (5.2)$$

di mana $N(S)$ adalah himpunan tetangga dari semua titik di S (neighborhood set).

—

5.3.4 Contoh Soal

Contoh 5.4. Sebuah perusahaan memiliki 5 lowongan pekerjaan berbeda dan ada 5 pelamar. Setiap pelamar memiliki kualifikasi untuk beberapa pekerjaan tertentu. Mungkinkah setiap orang mendapatkan pekerjaan yang sesuai jika data kualifikasinya adalah sebagai berikut?

- Pelamar 1: $\{Job1, Job2\}$
- Pelamar 2: $\{Job1, Job2\}$
- Pelamar 3: $\{Job1, Job2\}$
- Pelamar 4: $\{Job3, Job4, Job5\}$
- Pelamar 5: $\{Job2, Job5\}$

Solusi: Mari kita cek kondisi Hall. Misalkan $S = \{P_1, P_2, P_3\}$. Himpunan tetangga $N(S)$ (pekerjaan yang bisa mereka ambil) adalah $\{J_1, J_2\}$. Di sini, $|S| = 3$ sedangkan $|N(S)| = 2$. Karena $|N(S)| < |S|$, maka syarat Hall tidak terpenuhi. Artinya, tidak mungkin memberikan pekerjaan unik kepada setiap pelamar sehingga semua orang mendapatkan pekerjaan.

Contoh 5.5. Buktikan bahwa setiap graf bipartit reguler dengan derajat $k \geq 1$ (setiap titik memiliki derajat yang sama) selalu memiliki *perfect matching*.

Solusi: Misalkan graf bipartit $G = (X \cup Y, E)$ adalah k -reguler. 1. Berdasarkan *handshaking lemma*, $k|X| = k|Y|$, maka $|X| = |Y|$. 2. Untuk setiap $S \subseteq X$, jumlah sisi yang keluar dari S adalah $k|S|$. 3. Sisi-sisi ini harus berakhir di $N(S)$. Karena setiap titik di $N(S)$ memiliki derajat k , maka kapasitas maksimal sisi yang dapat diterima $N(S)$ adalah $k|N(S)|$. 4. Jadi, $k|S| \leq k|N(S)| \implies |S| \leq |N(S)|$. Karena syarat Hall terpenuhi untuk semua S , maka graf tersebut memiliki *complete matching* (yang karena $|X| = |Y|$, juga merupakan *perfect matching*).

5.3.5 Latihan Soal

1. Terdapat 6 grup belajar $(G_1, \dots, G_6)$ yang ingin memilih seorang perwakilan unik dari anggota mereka. Daftar anggota masing-masing grup adalah sebagai berikut:

- $G_1 = \{A, B\}$
- $G_2 = \{B, C\}$
- $G_3 = \{A, C\}$
- $G_4 = \{D, E\}$
- $G_5 = \{D, F\}$
- $G_6 = \{E, F\}$

Gunakan Teorema Hall untuk menentukan apakah mungkin untuk memilih 6 perwakilan yang berbeda untuk keenam grup tersebut. Jika mungkin, berikan salah satu contoh pemilihannya!

2. Buktikan bahwa sebuah graf bipartit memiliki *perfect matching* jika dan hanya jika $|X| = |Y|$ dan kondisi Hall terpenuhi.

3. (*Sistem Perwakilan Bersama*) Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah koleksi himpunan berhingga. Sebuah Sistem Perwakilan Bersama (*System of Distinct Representatives* - SDR) adalah urutan elemen berbeda $x_1, x_2, \dots, x_n$ sedemikian sehingga $x_i \in A_i$. Jelaskan hubungan antara SDR dengan Teorema Hall.
4. (*Latin Squares*) Tunjukkan bahwa setiap persegi Latin berukuran $k \times n$ (dengan $k < n$) selalu dapat diperluas menjadi persegi Latin $n \times n$.

Bab 6

Fungsi Pembangkit

Fungsi pembangkit adalah teknik yang sangat kuat untuk menangani masalah pencacahan, relasi rekurensi, dan pembuktian identitas kombinatorik. Konsep dasarnya adalah mengubah barisan bilangan menjadi objek aljabar formal.

6.1 Fungsi Pembangkit Biasa (Ordinary Generating Functions)

Definisi 6.1 (Fungsi Pembangkit Biasa). Misalkan $a_0, a_1, a_2, \dots$ adalah sebuah barisan bilangan. Fungsi pembangkit biasa (FPB) dari barisan tersebut adalah deret kuasa tak hingga:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (6.1)$$

6.1.1 Beberapa Deret Penting

Dalam prakteknya, kita sering menggunakan bentuk tertutup dari deret kuasa berikut:

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (FPB dari barisan $1, 1, 1, \dots$)
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ (FPB dari barisan $1, 2, 3, \dots$)
3. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ (Teorema Binomial)
4. $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n$ (Penting untuk masalah kombinasi multiset)

—

6.1.2 Aplikasi: Masalah Pemilihan

Fungsi pembangkit sangat memudahkan kita dalam menghitung cara memilih objek dengan batasan tertentu.

Contoh 6.1. Tentukan banyaknya cara untuk memilih 10 apel dari 3 jenis apel berbeda sedemikian sehingga setiap jenis apel dipilih setidaknya 1 dan tidak lebih dari 4.

Solusi: Setiap jenis apel dapat dipetakan ke dalam polinomial $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$. Karena ada 3 jenis, maka fungsi pembangkitnya adalah:

$$P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^3 = x^3(1 + x + x^2 + x^3)^3$$

Menggunakan rumus deret geometri tak hingga $1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$:

$$P(x) = x^3 \left(\frac{1-x^4}{1-x} \right)^3 = x^3(1-x^4)^3(1-x)^{-3}$$

Kita mencari koefisien dari x^{10} dalam $P(x)$, yang setara dengan mencari koefisien x^7 dalam $(1 - 3x^4 + 3x^8 - \dots) \times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3-1}{n} x^n$.

- Dari $(1) \times \binom{7+2}{7} x^7 \rightarrow \binom{9}{7} = 36$.
- Dari $(-3x^4) \times \binom{3+2}{3} x^3 \rightarrow -3 \times \binom{5}{3} = -30$.

Total cara = $36 - 30 = 6$.

6.1.3 Latihan Soal

1. Tentukan fungsi pembangkit untuk barisan $a_n = n^2$.
2. Gunakan fungsi pembangkit untuk membuktikan bahwa $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.
3. Berapa banyak cara memilih 12 bola dari kantong yang berisi bola merah, biru, dan hijau jika bola merah harus genap, bola biru minimal 1, dan bola hijau maksimal 3?
4. Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} + 2$ dengan $a_0 = 1$ menggunakan fungsi pembangkit.

6.2 Fungsi Pembangkit Eksponensial (*Exponential GF*)

Jika fungsi pembangkit biasa digunakan untuk masalah pemilihan (kombinasi), maka fungsi pembangkit eksponensial digunakan untuk masalah penyusunan (permutasi).

Definisi 6.2 (Fungsi Pembangkit Eksponensial). Fungsi pembangkit eksponensial dari barisan $a_0, a_1, a_2, \dots$ didefinisikan sebagai:

$$\hat{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (6.2)$$

6.2.1 Deret Eksponensial Penting

Dalam masalah konfigurasi warna, kita sering menggunakan bentuk deret e^x :

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Untuk objek yang jumlahnya bebas)
2. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (Untuk objek yang jumlahnya harus **genap**)
3. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (Untuk objek yang jumlahnya harus **ganjil**)

6.2.2 Aplikasi: Konfigurasi Warna

Masalah ini biasanya menanyakan: "Berapa banyak cara menyusun n objek menggunakan beberapa warna dengan syarat tertentu?"

Contoh 6.2. Tentukan banyaknya cara menyusun barisan panjang n menggunakan warna Merah, Putih, dan Biru sedemikian sehingga warna Merah muncul dalam jumlah genap.

Solusi: Fungsi pembangkit eksponensial untuk masing-masing warna adalah:

- Merah (Genap): $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Putih (Bebas): e^x
- Biru (Bebas): e^x

EGF totalnya adalah:

$$\hat{A}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \cdot e^x \cdot e^x = \frac{e^{2x}(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{3x} + e^x}{2}$$

Kita mencari koefisien dari $\frac{x^n}{n!}$ dalam ekspansi tersebut:

$$\hat{A}(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^n + 1}{2} \right) \frac{x^n}{n!}$$

Maka, banyaknya cara adalah $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$.

6.2.3 Latihan Soal

1. Berapa banyak cara menyusun string panjang n dari huruf $\{A, B, C\}$ sedemikian sehingga huruf A muncul setidaknya satu kali?
2. Tentukan banyaknya cara mewarnai n buah kotak identik yang disusun berjajar dengan warna Merah, Kuning, dan Hijau jika warna Merah dan Kuning masing-masing harus muncul dalam jumlah genap.

3. Gunakan EGF untuk menentukan banyaknya cara menyusun n orang pada barisan jika terdapat 2 orang tertentu yang tidak boleh berdampingan. (*Petunjuk: Bandingkan dengan metode komplemen*).
4. (*Challenge*) Tentukan banyaknya cara menyusun barisan n angka menggunakan $\{0, 1, 2, 3\}$ sedemikian sehingga angka 0 dan 1 masing-masing muncul setidaknya satu kali.

Bab 7

Soal Latihan Akhir

7.1 Bagian I: Isian Singkat

Tuliskan jawaban akhir saja secara tepat.

1. Banyaknya cara menyusun huruf-huruf dari kata "UNLAM" sedemikian sehingga huruf vokal tidak saling berdekatan adalah ...
2. Berapa banyak bilangan asli $n \leq 1000$ yang tidak habis dibagi 4 maupun 6?
...
3. Sebuah graf sederhana memiliki 8 titik dengan derajat masing-masing adalah $k, k, k, 3, 3, 4, 4, 5$. Nilai minimum k yang mungkin agar graf tersebut dapat terbentuk adalah ...
4. Koefisien dari x^{12} pada fungsi pembangkit biasa $A(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^4$ adalah ...
5. Banyaknya cara menempatkan 5 bola identik ke dalam 3 kotak berbeda dengan syarat tidak ada kotak yang kosong adalah ...
6. Berapa jumlah seluruh derajat titik pada graf lengkap K_{10} ? ...
7. Suku ke-8 dari barisan yang didefinisikan dengan $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 3$ adalah ...
8. Banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang merupakan *derangement* (tidak ada elemen di posisi aslinya) adalah ...
9. Jika 11 bilangan bulat dipilih secara acak dari himpunan $\{1, 2, \dots, 20\}$, maka pasti terdapat dua bilangan yang selisihnya adalah ...
10. Banyaknya string biner panjang 7 yang tidak memuat sub-string "11" adalah ...

—

7.2 Bagian II: Essay

Tuliskan langkah-langkah pembuktian dan argumen secara logis.

Soal 7.1. Buktikan bahwa di dalam sebuah pesta yang dihadiri oleh n orang ($n \geq 2$), selalu terdapat setidaknya dua orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama di antara tamu-tamu tersebut. (Asumsikan hubungan kenalan bersifat simetris dan tidak ada yang mengenal dirinya sendiri).

Soal 7.2. Gunakan fungsi pembangkit eksponensial untuk menentukan banyaknya cara menyusun barisan panjang n dari angka $\{0, 1, 2\}$ sedemikian sehingga angka 0 muncul dalam jumlah genap dan angka 1 muncul setidaknya satu kali.

Soal 7.3. Misalkan G adalah graf sederhana dengan n titik dan k komponen terhubung. Buktikan bahwa jumlah sisi maksimal di G adalah:

$$|E| \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Soal 7.4. Tentukan banyaknya solusi bulat dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ dengan batasan $0 \leq x_i \leq 7$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4$. Gunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Soal 7.5. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n , berlaku identitas kombinatorik berikut menggunakan argumen kombinatorik (*combinatorial proof*):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$