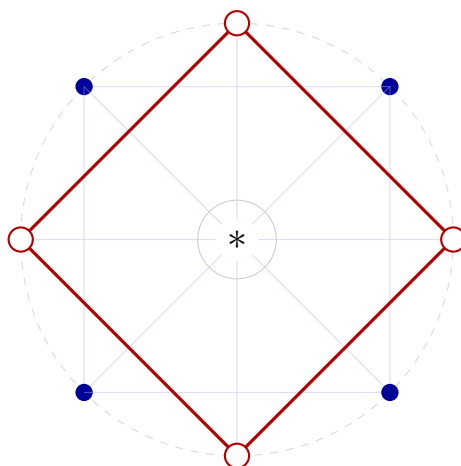

MODUL PELATIHAN ONMIPA 2026

STRUKTUR ALJABAR

Abstraksi Sistem: Grup, Ring, Field, dan Homomorfisma



Disusun Oleh:
Filza Buana Putra
2026

Kata Pengantar

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas selesainya modul **Modul Pelatihan ONMIPA 2026: Struktur Aljabar** ini. Modul ini disusun sebagai materi pengayaan bagi mahasiswa dalam mempersiapkan diri menghadapi seleksi ONMIPA-PT, dengan fokus pada penguatan logika abstrak dan teknik pembuktian formal.

Materi dalam modul ini disusun secara sistematis meliputi:

- **Teori Grup:** Sifat dasar, grup siklik, permutasi, subgrup normal, dan grup kuosien.
- **Homomorfisma:** Pemetaan struktur, kernel, dan Teorema Isomorfisma.
- **Teori Ring:** Daerah integral, karakteristik ring, ideal prima, dan ideal maksimal.
- **Ring Polinomial:** Algoritma pembagian, kriteria irreduisibilitas, dan polinomial siklotomik.

Setiap bab dilengkapi ringkasan konsep, pembahasan soal teknis, dan latihan mandiri standar kompetisi. Semoga modul ini bermanfaat sebagai referensi dalam melatih strategi penyelesaian masalah matematika. Kritik dan saran sangat diharapkan untuk penyempurnaan di masa mendatang.

Pontianak, Maret 2026

Penulis

Daftar Isi

1	Struktur Dasar Grup	1
1.1	Definisi dan Sifat-Sifat Dasar	1
	Soal 1.1	2
1.2	Subgrup	2
	Soal 1.2	3
1.3	Grup dan Subgrup Siklik	4
	Soal 1.3	4
1.4	Latihan Soal Bab 1	5
	Latihan Soal Bab 1	5
2	Koset dan Teorema Lagrange	6
2.1	Koset	6
	Soal 2.1	7
2.2	Teorema Lagrange	7
	Soal 2.2	8
2.3	Latihan Soal Bab 2	9
	Latihan Soal Bab 2	9
3	Subgrup Normal dan Grup Kuosien	10
3.1	Subgrup Normal	10
	Soal 3.1	11
3.2	Grup Kuosien	11
	Soal 3.2	12
3.3	Latihan Soal Bab 3	13
	Latihan Soal Bab 3	13
4	Homomorfisma Grup	14
4.1	Definisi dan Sifat Dasar	14
	Soal 4.1	15
4.2	Teorema Isomorfisma	15
	Soal 4.2	16
4.3	Latihan Soal Bab 4	16
	Latihan Soal Bab 4	16
5	Ring dan Daerah Integral	18
5.1	Definisi dan Sifat Dasar Ring	18
	Soal 5.1	19

5.2	Pembagi Nol dan Daerah Integral	19
	Soal 5.2	20
5.3	Karakteristik Ring	20
	Soal 5.3	21
5.4	Latihan Soal Bab 5	21
	Latihan Soal Bab 5	21
6	Ideal dan Ring Kuosien	23
6.1	Ideal	23
6.2	Ring Kuosien	23
	Soal 6	24
6.3	Teorema Isomorfisma Ring	24
6.4	Latihan Soal Bab 6	25
	Latihan Soal Bab 6	25
7	Ring Polinomial	27
7.1	Struktur Ring Polinomial	27
7.2	Daerah Euclid	27
	Soal Tambahan 7.1	28
7.3	Algoritma Pembagian dan Polinomial Irredu-sibel	28
7.4	Uji Irredu-sibilitas	29
	Soal 7	29
7.5	Lema Gauss dan Irredu-sibilitas di $\mathbb{Z}[x]$	29
7.6	Polinomial Siklotomik	30
7.7	Latihan Soal Bab 7	30
	Latihan Soal Bab 7	30
8	Soal Latihan Akhir	32
8.1	Soal Isian Singkat	32
8.2	Bagian II: Soal Uraian	34
	Bagian II: Soal Uraian	34
8.3	Kunci Jawaban Singkat	35
	Kunci Jawaban Singkat	35

Bab 1

Struktur Dasar Grup

Pada bab ini, kita akan mempelajari struktur aljabar paling mendasar, yaitu grup. Grup merupakan suatu himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Aksioma ini merupakan abstraksi dari sifat-sifat aritmetika yang umum ditemukan pada sistem bilangan.

1.1 Definisi dan Sifat-Sifat Dasar

Penelaahan struktur aljabar selalu dimulai dengan definisi mengenai bagaimana unsur-unsur dalam suatu himpunan berinteraksi melalui suatu operasi.

Definisi 1.1.1 (Operasi Biner). Misalkan G adalah suatu himpunan tidak kosong. **Operasi biner** (*binary operation*) $*$ pada G adalah suatu pemetaan $*$: $G \times G \rightarrow G$ yang mengaitkan setiap pasangan terurut $(a, b) \in G \times G$ dengan tepat satu unsur $a * b \in G$.

Berdasarkan definisi di atas, operasi biner secara implisit harus memenuhi sifat **tertutup** (*closed*). Selanjutnya, kita definisikan struktur grup sebagai berikut.

Definisi 1.1.2 (Grup). Suatu **grup** (*group*) $(G, *)$ adalah himpunan tidak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- (i) **Asosiatif** (*associative*): Untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- (ii) **Unsur Identitas** (*identity element*): Terdapat suatu unsur $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.
- (iii) **Unsur Invers** (*inverse element*): Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Jika grup G juga memenuhi sifat **komutatif** (*commutative*), yakni $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$, maka G disebut sebagai **Grup Abelian** (*Abelian group*).

Sifat-sifat dasar berikut merupakan konsekuensi logis langsung dari aksioma grup.

Teorema 1.1.3 (Ketunggalan Identitas dan Invers). Misalkan G adalah suatu grup. Maka berlaku:

1. Unsur identitas $e \in G$ adalah tunggal.
2. Untuk setiap $a \in G$, invers a^{-1} adalah tunggal.
3. Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

Korolari 1.1.4. Jika G adalah grup, maka untuk setiap $a \in G$, berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$.

Contoh 1.1.1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan biasa $(+)$ merupakan grup Abelian.

- Sifat asosiatif berlaku pada penjumlahan bilangan bulat.
- Unsur identitas adalah $0 \in \mathbb{Z}$.
- Invers dari $a \in \mathbb{Z}$ adalah $-a \in \mathbb{Z}$.

Namun, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bukan merupakan grup terhadap operasi perkalian karena unsur $2 \in \mathbb{Z}$ tidak memiliki invers perkalian di dalam $\mathbb{Z}$ yang bersifat bulat.

Contoh 1.1.2. Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan $i^2 = -1$. Himpunan G terhadap operasi perkalian bilangan kompleks merupakan grup Abelian dengan unsur identitas 1.

—

Soal 1.1

Problem 1.1.1. Tunjukkan bahwa dalam suatu grup G , **hukum kanselasi** (*cancellation law*) berlaku. Yakni, jika $a * b = a * c$, maka $b = c$; dan jika $b * a = c * a$, maka $b = c$.

Problem 1.1.2. Misalkan G adalah grup sedemikian sehingga $a^2 = e$ untuk setiap $a \in G$. Buktikan bahwa G adalah grup Abelian.

Problem 1.1.3. Diberikan himpunan bilangan rasional positif $\mathbb{Q}^+$. Definisikan operasi biner $*$ pada $\mathbb{Q}^+$ dengan aturan $a * b = \frac{ab}{2}$. Periksa apakah $(\mathbb{Q}^+, *)$ membentuk suatu grup.

1.2 Subgrup

Dalam analisis struktur aljabar, sering kali kita menjumpai suatu himpunan bagian dari grup yang dengan sendirinya membentuk grup terhadap operasi yang sama. Fenomena ini membawa kita pada konsep subgrup.

Definisi 1.2.1 (Subgrup). Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup dan H adalah himpunan bagian (*subset*) dari G . H dikatakan **subgrup** (*subgroup*) dari G jika H membentuk grup terhadap operasi $*$ yang didefinisikan pada G . Notasi $H \leq G$ digunakan untuk menyatakan bahwa H adalah subgrup dari G .

Setiap grup G dengan unsur identitas e setidaknya memiliki dua subgrup, yaitu $\{e\}$ yang disebut sebagai **subgrup trivial** (*trivial subgroup*), dan G itu sendiri. Subgrup selain G disebut sebagai **subgrup sejati** (*proper subgroup*).

Untuk membuktikan bahwa suatu himpunan bagian merupakan subgrup, kita dapat menggunakan kriteria yang lebih ringkas tanpa harus memeriksa seluruh aksioma grup secara terpisah.

Teorema 1.2.2 (Uji Subgrup Satu Langkah). Misalkan G adalah grup dan H adalah himpunan bagian tidak kosong dari G . H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab^{-1} \in H$.

Teorema 1.2.3 (Uji Subgrup Dua Langkah). Misalkan G adalah grup dan H adalah himpunan bagian tidak kosong dari G . H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi:

(i) **Sifat Tertutup:** Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$.

(ii) **Sifat Invers:** Untuk setiap $a \in H$, berlaku $a^{-1} \in H$.

Contoh 1.2.1. Himpunan bilangan genap $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subgrup dari grup bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +)$.

- $2\mathbb{Z}$ tidak kosong karena $0 = 2(0) \in 2\mathbb{Z}$.
- Ambil sembarang $x, y \in 2\mathbb{Z}$. Maka $x = 2m$ dan $y = 2n$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$.
- Karena $x - y = 2m - 2n = 2(m - n)$ dan $m - n \in \mathbb{Z}$, maka $x - y \in 2\mathbb{Z}$. Berdasarkan uji subgrup satu langkah, $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

Contoh 1.2.2. Diberikan grup matriks $GL(n, \mathbb{R})$. Himpunan $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, yang dikenal sebagai **Grup Linear Khusus** (*Special Linear Group*), merupakan subgrup dari $GL(n, \mathbb{R})$. Hal ini dikarenakan $\det(AB^{-1}) = \det(A) \det(B)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$.

Soal 1.2

Problem 1.2.1. Misalkan G adalah suatu grup. **Sentralis** (*centralizer*) dari suatu unsur $a \in G$ didefinisikan sebagai $C(a) = \{g \in G : ga = ag\}$. Buktikan bahwa $C(a)$ merupakan subgrup dari G .

Problem 1.2.2. Misalkan G adalah grup dan H, K adalah dua subgrup dari G . Buktikan bahwa $H \cup K$ adalah subgrup dari G jika dan hanya jika $H \subseteq K$ atau $K \subseteq H$.

Problem 1.2.3. Misalkan G adalah grup hingga berorde genap. Tunjukkan bahwa terdapat himpunan bagian tidak kosong $S \subset G$ dengan $S = \{x \in G : x \neq x^{-1}\}$ sedemikian sehingga kardinalitas S adalah genap. Gunakan hasil ini untuk menunjukkan bahwa G memuat sedikitnya satu unsur berorde 2.

Problem 1.2.4. Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G . Didefinisikan himpunan $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. Buktikan bahwa $HK \leq G$ jika dan hanya jika $HK = KH$.

1.3 Grup dan Subgrup Siklik

Pada bagian sebelumnya, kita telah melihat bahwa subgrup dapat dikonstruksi melalui himpunan bagian yang memenuhi kriteria tertentu. Salah satu cara paling mendasar untuk membangun subgrup adalah dengan menggunakan perpangkatan dari satu unsur tunggal.

Definisi 1.3.1 (Grup Siklik). Suatu grup G dikatakan **siklik** (*cyclic group*) jika terdapat suatu unsur $a \in G$ sedemikian sehingga setiap unsur di G dapat dinyatakan sebagai perpangkatan dari a . Unsur a disebut sebagai **pembangun** atau **generator** (*generator*) dari G , dan ditulis $G = \langle a \rangle$. Secara formal:

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Penting untuk dicatat bahwa dalam notasi aditif, a^n bermakna $na = a + a + \dots + a$ (sebanyak n kali).

Definisi 1.3.2 (Orde Unsur). Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. **Orde** (*order*) dari unsur a , dinotasikan dengan $|a|$, adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$. Jika tidak ada bilangan positif sedemikian, maka a dikatakan memiliki orde tak hingga.

Struktur subgrup dari grup siklik memiliki sifat yang sangat teratur, sebagaimana dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.3.3 (Teorema Fundamental Grup Siklik). *Setiap subgrup dari grup siklik adalah siklik. Lebih jauh lagi, jika $|\langle a \rangle| = n$, maka orde dari setiap subgrup dari $\langle a \rangle$ adalah pembagi dari n .*

Contoh 1.3.1. Grup $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup siklik tak hingga yang dibangun oleh 1 atau -1 , sehingga $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$. Subgrup dari $\mathbb{Z}$ selalu berbentuk $n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$.

Contoh 1.3.2. Grup $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ terhadap penjumlahan modulo 6 adalah grup siklik berorde 6. Generatornya adalah unsur-unsur yang relatif prima dengan 6, yaitu 1 dan 5. Perhatikan bahwa $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ merupakan subgrup siklik berorde 3.

—

Soal 1.3

Problem 1.3.1. Misalkan $G = \langle a \rangle$ adalah grup siklik berorde n . Buktikan bahwa a^k merupakan generator dari G jika dan hanya jika $\text{fpb}(k, n) = 1$.

Problem 1.3.2. Buktikan bahwa setiap grup berorde prima haruslah merupakan grup siklik.

Problem 1.3.3. Tentukan banyaknya generator dari grup siklik berorde n , dan nyatakan dalam fungsi totien Euler $\phi(n)$.

Problem 1.3.4. Misalkan G adalah grup hingga. Buktikan bahwa jika G tidak memiliki subgrup sejati yang tidak trivial, maka G haruslah merupakan grup siklik berorde prima.

Problem 1.3.5. Misalkan a dan b adalah unsur-unsur dalam grup G sedemikian sehingga $ab = ba$. Jika $|a| = m$ dan $|b| = n$ dengan $\text{fpb}(m, n) = 1$, buktikan bahwa $|ab| = mn$. Berikan contoh penyangkal (*counterexample*) jika kondisi $ab = ba$ dihilangkan.

1.4 Latihan Soal Bab 1

Bagian ini memuat soal-soal latihan yang mencakup materi definisi grup, subgrup, dan grup siklik. Kerjakan soal-soal berikut untuk memperdalam pemahaman mengenai struktur dasar grup.

Problem 1.4.1. Misalkan G adalah grup. Buktikan bahwa jika $(ab)^2 = a^2b^2$ untuk setiap $a, b \in G$, maka G adalah grup Abelian.

Problem 1.4.2. Didefinisikan himpunan matriks $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Buktikan bahwa H adalah subgrup dari $GL(2, \mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian matriks.

Problem 1.4.3. Tentukan semua subgrup dari grup siklik $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ dan gambarkan diagram latris (*subgroup lattice*) dari subgrup-subgrup tersebut.

Problem 1.4.4. Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G . Untuk suatu unsur tetap $g \in G$, didefinisikan himpunan $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$. Buktikan bahwa gHg^{-1} juga merupakan subgrup dari G .

Problem 1.4.5. Misalkan G adalah grup hingga. Buktikan bahwa untuk setiap $a \in G$, terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = e$.

Problem 1.4.6. Buktikan bahwa jika H dan K adalah subgrup dari G , maka $H \cap K$ adalah subgrup terbesar yang termuat di dalam H sekaligus di dalam K .

Problem 1.4.7. Diberikan grup G dan dua unsur $a, b \in G$. Buktikan bahwa unsur ab dan ba memiliki orde yang sama.

Problem 1.4.8. Tentukan semua generator dari grup siklik $(\mathbb{Z}_{20}, +)$.

Problem 1.4.9. Misalkan G adalah grup Abelian. Buktikan bahwa himpunan semua unsur berorde hingga di G , yaitu $T = \{g \in G : |g| < \infty\}$, membentuk subgrup dari G . (Subgrup ini disebut sebagai *torsion subgroup*).

Problem 1.4.10. Misalkan G adalah grup yang tidak memiliki subgrup sejati yang tidak trivial. Jika orde G lebih dari 1, buktikan bahwa G haruslah grup hingga dan berorde prima.

Problem 1.4.11. Buktikan bahwa suatu grup tidak kosong G adalah grup Abelian jika dan hanya jika $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ untuk setiap $a, b \in G$.

Problem 1.4.12. Misalkan a adalah satu-satunya unsur berorde 2 dalam suatu grup G . Buktikan bahwa $ax = xa$ untuk semua $x \in G$.

Bab 2

Koset dan Teorema Lagrange

Pada bab sebelumnya, kita telah membahas mengenai struktur grup dan subgrup. Namun, kita belum menelaah bagaimana subgrup membagi grup induknya. Bab ini akan membahas konsep koset, yang merupakan alat fundamental untuk menguraikan struktur grup melalui partisi, serta membuktikan salah satu teorema paling penting dalam teori grup hingga, yaitu Teorema Lagrange.

2.1 Koset

Konsep koset memungkinkan kita untuk membagi suatu grup menjadi himpunan-himpunan bagian yang saling asing dan memiliki ukuran yang sama.

Definisi 2.1.1 (Koset). Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subgrup dari G . Untuk setiap $a \in G$, didefinisikan:

- (i) **Koset kiri** (*left coset*) dari H dalam G yang memuat a sebagai:

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

- (ii) **Koset kanan** (*right coset*) dari H dalam G yang memuat a sebagai:

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

Unsur a disebut sebagai **representatif** atau perwakilan dari koset tersebut.

Penting untuk diperhatikan bahwa dalam grup non-Abelian, koset kiri aH tidak selalu sama dengan koset kanan Ha . Berikut adalah sifat-sifat dasar koset yang sangat penting dalam pembuktian formal.

Lemma 2.1.2. Misalkan H adalah subgrup dari G dan $a, b \in G$. Maka berlaku:

- (i) $a \in aH$.
- (ii) $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$.
- (iii) $aH = bH$ atau $aH \cap bH = \emptyset$. (Setiap dua koset kiri bersifat identik atau lepas sama sekali).

(iv) $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$.

Sifat (iii) menunjukkan bahwa koleksi semua koset kiri dari H membentuk suatu **partisi** (*partition*) dari G . Artinya, G merupakan gabungan dari koset-koset kiri yang saling asing.

Contoh 2.1.1. Misalkan $G = \mathbb{Z}$ (terhadap penjumlahan) dan $H = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$. Koset-koset kiri dari H dalam G adalah:

- $0 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\} = H$
- $1 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
- $2 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

Dapat dilihat bahwa $\mathbb{Z} = (0 + 3\mathbb{Z}) \cup (1 + 3\mathbb{Z}) \cup (2 + 3\mathbb{Z})$ dan ketiga himpunan ini saling asing.

—

Soal 2.1

Problem 2.1.1. Misalkan $G = S_3$ (grup permutasi dari 3 unsur) dan $H = \{(1), (12)\}$. Tentukan semua koset kiri dan koset kanan dari H dalam G . Apakah setiap koset kiri sama dengan koset kanannya?

Problem 2.1.2. Misalkan H adalah subgrup dari G . Buktikan bahwa terdapat korespondensi satu-satu (*bijection*) antara subgrup H dengan sebarang koset kiri aH . (Hal ini menunjukkan bahwa semua koset memiliki kardinalitas yang sama).

Problem 2.1.3. Buktikan bahwa jika $aH = Ha$ untuk setiap $a \in G$, maka H adalah subgrup normal (definisi formal mengenai subgrup normal akan dibahas pada bab selanjutnya, namun buktikan kesamaan himpunan ini terlebih dahulu).

Problem 2.1.4. Misalkan H adalah subgrup dari G . Tunjukkan bahwa pemetaan f yang didefinisikan oleh $f(aH) = Ha^{-1}$ merupakan bijeksi dari himpunan semua koset kiri dari H ke himpunan semua koset kanan dari H .

2.2 Teorema Lagrange

Teorema Lagrange merupakan hasil fundamental yang memberikan batasan ketat bagi struktur grup hingga. Teorema ini menyatakan bahwa orde dari subgrup haruslah membagi habis orde grup induknya. Sebelum masuk ke teorema utama, kita perlu mendefinisikan konsep indeks.

Definisi 2.2.1 (Indeks Subgrup). Misalkan H adalah subgrup dari G . **Indeks** (*index*) dari H dalam G adalah banyaknya koset kiri (atau koset kanan) yang berbeda dari H dalam G . Indeks ini dinotasikan dengan $[G : H]$.

Teorema 2.2.2 (Teorema Lagrange). *Jika G adalah grup hingga dan H adalah subgrup dari G , maka $|H|$ membagi $|G|$. Lebih spesifik lagi:*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

Bukti. Berdasarkan sifat koset yang telah dibahas pada bagian sebelumnya, kita ketahui bahwa koset-koset kiri dari H membentuk partisi dari G . Misalkan $k = [G : H]$ adalah banyaknya koset kiri yang berbeda, katakanlah $a_1H, a_2H, \dots, a_kH$. Maka:

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_kH$$

Karena setiap dua koset kiri yang berbeda bersifat saling asing dan setiap koset memiliki jumlah unsur yang sama dengan $|H|$, maka total unsur dalam G adalah penjumlahan unsur dalam seluruh koset tersebut:

$$|G| = \underbrace{|H| + |H| + \dots + |H|}_{k \text{ kali}} = k \cdot |H|$$

Sehingga terbukti bahwa $|G| = [G : H] \cdot |H|$. □

Akibat dari teorema ini sangat luas, beberapa di antaranya adalah sebagai berikut.

Korolari 2.2.3. *Jika G adalah grup hingga dan $a \in G$, maka orde dari unsur a membagi $|G|$.*

Korolari 2.2.4. *Setiap grup berorde prima adalah grup siklik.*

Korolari 2.2.5 (Teorema Kecil Fermat). *Untuk setiap bilangan bulat a dan bilangan prima p , berlaku $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

—

Soal 2.2

Problem 2.2.1. Misalkan G adalah grup berorde pq dengan p dan q adalah bilangan prima. Buktikan bahwa setiap subgrup sejati dari G adalah grup siklik.

Problem 2.2.2. Diberikan grup G dan dua subgrup H, K dari G sedemikian sehingga $|H| = 12$ dan $|K| = 35$. Tentukan $|H \cap K|$.

Problem 2.2.3. Misalkan G adalah grup berorde n . Jika G memiliki tepat satu subgrup berorde d untuk setiap pembagi d dari n , buktikan bahwa G adalah grup siklik.

Problem 2.2.4. Buktikan bahwa jika H adalah subgrup dari G dengan $[G : H] = 2$, maka $aH = Ha$ untuk setiap $a \in G$.

Problem 2.2.5. Misalkan H dan K adalah subgrup hingga dari grup G . Buktikan formula berikut:

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

Perhatikan bahwa HK tidak harus merupakan subgrup dari G .

2.3 Latihan Soal Bab 2

Selesaikan soal-soal berikut untuk memantapkan pemahaman Anda mengenai konsep koset dan Teorema Lagrange.

Problem 2.3.1. Misalkan H adalah subgrup dari grup G . Buktikan bahwa dua koset kiri aH dan bH adalah sama jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$.

Problem 2.3.2. Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}_{24}, +)$ dan subgrup $H = \langle 4 \rangle$.

(a) Tentukan semua koset kiri dari H dalam G .

(b) Tentukan indeks subgrup $[G : H]$.

Problem 2.3.3. Misalkan G adalah grup berorde n dan $a \in G$. Buktikan bahwa $a^n = e$.

Problem 2.3.4. Misalkan G adalah grup berorde 30. Berapa kemungkinan orde dari subgrup-subgrup yang dimiliki oleh G ? Buktikan bahwa G tidak mungkin memiliki subgrup berorde 7.

Problem 2.3.5. Diberikan grup matriks $G = GL(2, \mathbb{R})$ dan subgrup $SL(2, \mathbb{R})$. Berikan interpretasi geometris atau aljabar mengenai koset kiri dari $SL(2, \mathbb{R})$ dalam G .

Problem 2.3.6. Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup hingga G . Jika $|H| > \sqrt{|G|}$ dan $|K| > \sqrt{|G|}$, buktikan bahwa $H \cap K \neq \{e\}$.

Problem 2.3.7. Buktikan bahwa jika G adalah grup berorde n dan k adalah bilangan bulat yang relatif prima dengan n , maka pemetaan $f : G \rightarrow G$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^k$ adalah suatu pemetaan bijektif (meskipun belum tentu merupakan homomorfisma).

Problem 2.3.8. Tunjukkan bahwa setiap grup berorde prima haruslah merupakan grup siklik.

Problem 2.3.9. Misalkan G adalah grup dan H, K adalah subgrup dari G sedemikian sehingga $K \leq H \leq G$. Jika $[G : H]$ dan $[H : K]$ keduanya berhingga, buktikan bahwa $[G : K]$ juga berhingga dan berlaku $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Problem 2.3.10. Misalkan G adalah grup hingga dan H adalah subgrup dari G . Jika terdapat unsur $a \in G$ sedemikian sehingga $aH = Ha$, apakah ini berarti $xH = Hx$ untuk semua $x \in G$? Berikan bukti atau contoh penyangkal (*counterexample*).

Bab 3

Subgrup Normal dan Grup Kuosien

Pada bab sebelumnya, kita telah melihat bahwa suatu subgrup H dari G dapat mempartisi grup induknya menjadi koset-koset yang saling asing. Namun, tidak semua subgrup memiliki sifat yang memungkinkan himpunan koset-koset tersebut membentuk sebuah grup baru. Bab ini akan membahas kondisi khusus yang harus dipenuhi oleh subgrup agar operasi pada koset terdefinisi dengan baik, yang dikenal sebagai subgrup normal.

3.1 Subgrup Normal

Secara umum, perkalian dua koset kiri $(aH)(bH)$ tidak selalu menghasilkan koset kiri $(ab)H$. Agar struktur grup dapat diwariskan ke himpunan koset, kita memerlukan kondisi di mana koset kiri selalu sama dengan koset kanan.

Definisi 3.1.1 (Subgrup Normal). Suatu subgrup N dari grup G dikatakan **subgrup normal** (*normal subgroup*) jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$, berlaku $gng^{-1} \in N$. Notasi $N \trianglelefteq G$ digunakan untuk menyatakan bahwa N adalah subgrup normal dari G .

Terdapat beberapa kriteria ekivalen yang sering digunakan untuk membuktikan normalitas suatu subgrup dalam pengerjaan soal.

Teorema 3.1.2 (Kriteria Subgrup Normal). Misalkan N adalah subgrup dari G . Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekivalen:

- (i) N adalah subgrup normal dari G .
- (ii) $gNg^{-1} \subseteq N$ untuk setiap $g \in G$.
- (iii) $gN = Ng$ untuk setiap $g \in G$ (Koset kiri sama dengan koset kanan).

Contoh 3.1.1. Setiap subgrup H dari grup Abelian G selalu bersifat normal. Hal ini dikarenakan untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$, berlaku $ghg^{-1} = gg^{-1}h = eh = h \in H$ karena sifat komutatif.

Contoh 3.1.2. Misalkan $G = S_3$ dan $H = \{(1), (12)\}$. Subgrup H tidak normal dalam G karena terdapat $g = (123)$ sedemikian sehingga:

$$(123)H = \{(123), (13)\} \quad \text{sedangkan} \quad H(123) = \{(123), (23)\}$$

Karena $(123)H \neq H(123)$, maka H bukan subgrup normal.

Teorema 3.1.3. Jika H adalah subgrup dari G dengan indeks $[G : H] = 2$, maka $H \trianglelefteq G$.

—

Soal 3.1

Problem 3.1.1. Buktikan bahwa jika $N \trianglelefteq G$ dan $M \trianglelefteq G$, maka $N \cap M \trianglelefteq G$.

Problem 3.1.2. Pusat Grup (*Center of a Group*) didefinisikan sebagai $Z(G) = \{z \in G : zg = gz, \forall g \in G\}$. Buktikan bahwa $Z(G)$ selalu merupakan subgrup normal dari G .

Problem 3.1.3. Misalkan N adalah subgrup normal dari G dan H adalah sebarang subgrup dari G . Buktikan bahwa $NH = \{nh : n \in N, h \in H\}$ adalah subgrup dari G .

Problem 3.1.4. Buktikan bahwa jika setiap subgrup dari grup G adalah normal, maka setiap unsur di G komutatif terhadap subgrup-subgrupnya, namun berikan contoh bahwa ini tidak menjamin G adalah grup Abelian (Petunjuk: Periksa Grup Kuaternion Q_8).

Problem 3.1.5. Misalkan $H \leq G$. Buktikan bahwa $H \trianglelefteq G$ jika dan hanya jika H merupakan gabungan dari kelas-kelas konjugasi dalam G .

3.2 Grup Kuosien

Setelah kita memahami konsep subgrup normal, kita dapat mendefinisikan operasi biner pada himpunan koset-koset. Jika N adalah subgrup normal dari G , maka himpunan semua koset kiri dari N dalam G dapat dikonstruksi menjadi sebuah grup.

Teorema 3.2.1. Misalkan $N \trianglelefteq G$. Himpunan koset-koset kiri $G/N = \{gN : g \in G\}$ membentuk sebuah grup di bawah operasi biner yang didefinisikan sebagai:

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

untuk setiap $aN, bN \in G/N$.

Bukti. Pertama, kita harus menunjukkan bahwa operasi tersebut terdefinisi dengan baik (*well-defined*). Misalkan $aN = a'N$ dan $bN = b'N$. Maka $a' = an_1$ dan $b' = bn_2$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$. Perkalian perwakilannya adalah:

$$a'b' = (an_1)(bn_2) = a(n_1b)n_2$$

Karena $N \trianglelefteq G$, maka $n_1b \in Nb = bN$, sehingga $n_1b = bn_3$ untuk suatu $n_3 \in N$. Maka:

$$a'b' = a(bn_3)n_2 = (ab)(n_3n_2)$$

Karena $n_3n_2 \in N$, maka $(a'b')N = (ab)N$. Operasi ini terdefinisi dengan baik. Aksioma grup lainnya (asosiatif, identitas $eN = N$, dan invers $(aN)^{-1} = a^{-1}N$) terpenuhi secara alami dari sifat grup G . $\square$

Definisi 3.2.2 (Grup Kuosien). Grup $(G/N, \cdot)$ yang didefinisikan di atas disebut sebagai **grup kuosien** (*quotient group* atau *factor group*) dari G oleh N .

Struktur grup kuosien memberikan gambaran tentang "sisa" dari G setelah kita menganggap semua elemen dalam N sebagai identitas.

Contoh 3.2.1. Misalkan $G = \mathbb{Z}$ dan $N = n\mathbb{Z}$. Karena $\mathbb{Z}$ Abelian, maka $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Grup kuosien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ adalah himpunan koset $\{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$, yang isomorfis dengan grup penjumlahan bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n$).

Teorema 3.2.3. Jika G adalah grup Abelian, maka grup kuosien G/N juga merupakan grup Abelian untuk setiap $N \trianglelefteq G$. Sebaliknya, jika $G/Z(G)$ adalah siklik, maka G adalah grup Abelian.

—

Soal 3.2

Problem 3.2.1. Diberikan $G = \mathbb{Z}_{12}$ dan $N = \langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$.

- (a) Tentukan semua elemen dari grup kuosien G/N .
- (b) Buatlah tabel Cayley untuk G/N .
- (c) Tentukan orde dari elemen $(1 + N)$ dalam G/N .

Problem 3.2.2. Misalkan G adalah grup dan $Z(G)$ adalah pusatnya. Buktikan bahwa jika $G/Z(G)$ adalah grup siklik, maka G haruslah merupakan grup Abelian.

Problem 3.2.3. Misalkan $N \trianglelefteq G$ dan $[G : N] = n$. Buktikan bahwa untuk setiap $g \in G$, berlaku $g^n \in N$.

Problem 3.2.4. Tunjukkan bahwa jika G adalah grup yang memiliki subgrup normal N sedemikian sehingga N dan G/N keduanya adalah grup Abelian, maka G belum tentu merupakan grup Abelian. (Petunjuk: Periksa grup dihedral D_3 atau S_3).

Problem 3.2.5. Buktikan bahwa jika G adalah grup hingga dan $N \trianglelefteq G$, maka orde dari elemen gN dalam grup kuosien G/N membagi orde dari elemen g dalam grup G .

3.3 Latihan Soal Bab 3

Selesaikan soal-soal berikut untuk memantapkan pemahaman Anda mengenai subgrup normal dan struktur grup kuosien.

Problem 3.3.1. Misalkan H adalah subgrup dari G . Buktikan bahwa $H \trianglelefteq G$ jika dan hanya jika $gHg^{-1} = H$ untuk setiap $g \in G$.

Problem 3.3.2. Buktikan bahwa jika G adalah grup dan N adalah subgrup normal dari G sedemikian sehingga $|N| = 2$, maka $N \subseteq Z(G)$.

Problem 3.3.3. Tentukan semua subgrup normal dari grup S_3 dan tentukan grup kuosien yang bersesuaian untuk masing-masing subgrup tersebut.

Problem 3.3.4. Misalkan G adalah grup dan G' adalah **subgrup komutator** (*commutator subgroup*) dari G , yaitu subgrup yang dibangun oleh elemen-elemen berbentuk $aba^{-1}b^{-1}$ untuk setiap $a, b \in G$.

(a) Buktikan bahwa $G' \trianglelefteq G$.

(b) Buktikan bahwa grup kuosien G/G' adalah Abelian.

Problem 3.3.5. Buktikan bahwa jika N adalah subgrup normal dari grup hingga G sedemikian sehingga $\text{fpb}(|N|, [G : N]) = 1$, maka N adalah satu-satunya subgrup berorde $|N|$ di dalam G .

Problem 3.3.6. Diberikan $G = \mathbb{R}$ (terhadap penjumlahan) dan $N = \mathbb{Z}$. Gambarkan secara intuitif struktur dari grup kuosien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (Petunjuk: Hubungkan dengan lingkaran satuan S^1).

Problem 3.3.7. Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G . **Normalis** (*normalizer*) dari H dalam G didefinisikan sebagai $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$.

(a) Buktikan bahwa $N_G(H) \leq G$.

(b) Buktikan bahwa $H \trianglelefteq N_G(H)$.

(c) Tunjukkan bahwa $H \trianglelefteq G$ jika dan hanya jika $N_G(H) = G$.

Problem 3.3.8. Misalkan G adalah grup dan $N \trianglelefteq G$. Jika G adalah grup yang dibangun secara hingga (*finitely generated*), buktikan bahwa G/N juga merupakan grup yang dibangun secara hingga.

Problem 3.3.9. Misalkan G adalah grup non-Abelian berorde p^3 dengan p bilangan prima. Buktikan bahwa $|Z(G)| = p$ dan $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Problem 3.3.10. Buktikan bahwa jika $N \trianglelefteq G$ dan $a \in G$ memiliki orde n , maka orde dari elemen aN di G/N adalah pembagi dari n . Berikan contoh di mana orde aN lebih kecil dari n .

Bab 4

Homomorfisma Grup

Dalam bab-bab sebelumnya, kita telah mempelajari struktur internal dari sebuah grup. Pada bab ini, kita akan mempelajari hubungan antara dua grup melalui suatu pemetaan. Konsep homomorfisma memungkinkan kita untuk membandingkan dua grup dan menentukan sejauh mana keduanya memiliki struktur yang serupa.

4.1 Definisi dan Sifat Dasar

Definisi 4.1.1 (Homomorfisma Grup). Misalkan $(G, \cdot)$ dan $(H, *)$ adalah dua buah grup. Suatu pemetaan $\phi : G \rightarrow H$ disebut **homomorfisma** (*homomorphism*) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku:

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) * \phi(b)$$

Jika suatu homomorfisma bersifat bijektif, maka pemetaan tersebut disebut sebagai **isomorfisma** (*isomorphism*), dan kita katakan G isomorfis dengan H (dinotasikan $G \cong H$).

Berikut adalah sifat-sifat dasar yang dipertahankan oleh homomorfisma:

Teorema 4.1.2 (Sifat-Sifat Homomorfisma). Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma grup. Maka:

- (i) $\phi(e_G) = e_H$, di mana e_G dan e_H adalah identitas di G dan H .
- (ii) $\phi(a^{-1}) = [\phi(a)]^{-1}$ untuk setiap $a \in G$.
- (iii) Jika $K \leq G$, maka $\phi(K) \leq H$.
- (iv) Jika $L \leq H$, maka $\phi^{-1}(L) = \{g \in G : \phi(g) \in L\} \leq G$.

Dua objek paling penting dalam studi homomorfisma adalah **Kernel** dan **Citra** (*Image*).

Definisi 4.1.3 (Kernel dan Citra). Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma.

- (i) **Kernel** dari ϕ adalah himpunan elemen di G yang dipetakan ke identitas di H :

$$\text{Ker}(\phi) = \{g \in G : \phi(g) = e_H\}$$

- (ii) **Citra (Image)** dari ϕ adalah himpunan semua nilai fungsi di H :

$$\text{Im}(\phi) = \{\phi(g) : g \in G\}$$

Teorema 4.1.4. Jika $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma, maka $\text{Ker}(\phi)$ merupakan subgrup normal dari G ($\text{Ker}(\phi) \trianglelefteq G$).

—

Soal 4.1

Problem 4.1.1. Didefinisikan pemetaan $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ dengan $\phi(x) = 2^x$. Periksa apakah ϕ merupakan suatu homomorfisma. Jika ya, tentukan kernel-nya.

Problem 4.1.2. Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma. Buktikan bahwa ϕ adalah pemetaan injektif jika dan hanya jika $\text{Ker}(\phi) = \{e_G\}$.

Problem 4.1.3. Buktikan bahwa tidak ada homomorfisma yang surjektif dari $\mathbb{Z}_{10}$ ke $\mathbb{Z}_3$.

Problem 4.1.4. Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma dan $N \trianglelefteq H$. Buktikan bahwa $\phi^{-1}(N)$ adalah subgrup normal dari G .

4.2 Teorema Isomorfisma

Teorema Isomorfisma memberikan alat yang sangat kuat untuk mengidentifikasi struktur grup kuosien. Teorema ini menyatakan bahwa setiap citra homomorfik dari sebuah grup isomorfis dengan grup kuosien terhadap kernelnya.

Teorema 4.2.1 (Teorema Isomorfisma Pertama). Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma grup. Maka:

$$G / \text{Ker}(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$$

Secara khusus, jika ϕ bersifat surjektif, maka $G / \text{Ker}(\phi) \cong H$.

Bukti. Definisikan pemetaan $\psi : G / \text{Ker}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$ dengan $\psi(g\text{Ker}(\phi)) = \phi(g)$.

- (i) **Terdefinisi dengan Baik:** Jika $g_1\text{Ker}(\phi) = g_2\text{Ker}(\phi)$, maka $g_1^{-1}g_2 \in \text{Ker}(\phi)$, sehingga $\phi(g_1^{-1}g_2) = e_H$. Hal ini berimplikasi $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, maka ψ terdefinisi dengan baik.

- (ii) **Homomorfisma:** $\psi((a\text{Ker}(\phi))(b\text{Ker}(\phi))) = \psi(ab\text{Ker}(\phi)) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \psi(a\text{Ker}(\phi))\psi(b\text{Ker}(\phi))$.

(iii) **Injektif:** Jika $\psi(g\text{Ker}(\phi)) = e_H$, maka $\phi(g) = e_H$, sehingga $g \in \text{Ker}(\phi)$. Maka $g\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\phi)$, yang merupakan identitas di $G/\text{Ker}(\phi)$.

(iv) **Surjektif:** Jelas dari definisi citra $\text{Im}(\phi)$.

Karena ψ adalah homomorfisma yang bijektif, maka $G/\text{Ker}(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$. $\square$

Contoh 4.2.1. Pandang homomorfisma $\phi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ dengan $\phi(k) = k \pmod{n}$. Kernel dari pemetaan ini adalah $\text{Ker}(\phi) = \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv 0 \pmod{n}\} = n\mathbb{Z}$. Berdasarkan Teorema Isomorfisma Pertama, kita peroleh:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$$

Contoh 4.2.2. Misalkan $G = \mathbb{R}^*$ (grup perkalian bilangan real tak nol) dan $\phi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ didefinisikan oleh $\phi(x) = |x|$. Citra dari ϕ adalah $\mathbb{R}^+$ (himpunan bilangan real positif). Kernelnya adalah $\text{Ker}(\phi) = \{1, -1\}$. Maka:

$$\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+$$

—

Soal 4.2

Problem 4.2.1. Misalkan G adalah grup. Didefinisikan pemetaan $\phi : G \rightarrow G$ dengan $\phi(g) = g^2$. Tunjukkan dengan contoh bahwa ϕ belum tentu merupakan homomorfisma. Kondisi apakah yang harus dipenuhi G agar ϕ menjadi homomorfisma?

Problem 4.2.2. Gunakan Teorema Isomorfisma Pertama untuk membuktikan bahwa $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ isomorfis dengan grup lingkaran $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ terhadap perkalian.

Problem 4.2.3. Misalkan N adalah subgrup normal dari G . Definisikan pemetaan kanonik $\pi : G \rightarrow G/N$ dengan $\pi(g) = gN$. Tentukan kernel dan citra dari pemetaan ini.

Problem 4.2.4. Diberikan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma surjektif. Jika G adalah grup Abelian, buktikan bahwa H juga merupakan grup Abelian.

Problem 4.2.5. Buktikan bahwa tidak ada homomorfisma yang tidak trivial dari $(\mathbb{Q}, +)$ ke $(\mathbb{Z}, +)$.

4.3 Latihan Soal Bab 4

Selesaikan soal-soal berikut untuk menguji pemahaman Anda mengenai hubungan antar struktur grup melalui pemetaan homomorfisma.

Problem 4.3.1. Misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisma grup. Buktikan bahwa jika G adalah grup siklik, maka $\text{Im}(\phi)$ juga merupakan grup siklik.

Problem 4.3.2. Tentukan semua homomorfisma grup dari $(\mathbb{Z}, +)$ ke $(\mathbb{Z}, +)$. Manakah di antaranya yang merupakan isomorfisma?

Problem 4.3.3. Misalkan G adalah suatu grup. Pemetaan $\text{inn}_g : G \rightarrow G$ yang didefinisikan oleh $\text{inn}_g(x) = gxg^{-1}$ disebut sebagai **automorfisma dalam** (*inner automorphism*).

(a) Buktikan bahwa inn_g adalah suatu isomorfisma dari G ke dirinya sendiri.

(b) Misalkan $\text{Inn}(G) = \{\text{inn}_g : g \in G\}$. Buktikan bahwa $\text{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

Problem 4.3.4. Didefinisikan pemetaan $\phi : (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ dengan $\phi(z) = |z|$. Tentukan kernel dari ϕ dan berikan interpretasi geometrisnya di bidang kompleks.

Problem 4.3.5. Gunakan Teorema Isomorfisma Pertama untuk membuktikan bahwa $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$, di mana $\mathbb{R}^*$ adalah grup perkalian bilangan real tak nol.

Problem 4.3.6. Buktikan bahwa grup $(\mathbb{Q}, +)$ tidak isomorfis dengan grup $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Problem 4.3.7. Misalkan G adalah grup berorde n dan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma. Jika $\text{fpb}(n, |H|) = 1$, buktikan bahwa ϕ haruslah homomorfisma trivial (yakni memetakan semua elemen ke identitas).

Problem 4.3.8. Misalkan N adalah subgrup normal dari G . Buktikan bahwa setiap subgrup dari grup kuosien G/N memiliki bentuk H/N untuk suatu subgrup H dari G yang memuat N .

Problem 4.3.9. Tentukan banyaknya homomorfisma yang berbeda dari $\mathbb{Z}_{12}$ ke $\mathbb{Z}_{30}$.

Problem 4.3.10. Buktikan bahwa jika $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma surjektif dan G adalah grup Abelian, maka H juga Abelian. Berikan contoh penyangkal untuk menunjukkan bahwa jika H Abelian, G belum tentu Abelian.

Bab 5

Ring dan Daerah Integral

Struktur ring merupakan perluasan dari konsep grup yang melibatkan dua operasi biner. Ring memberikan kerangka abstrak untuk mempelajari sistem yang memiliki sifat serupa dengan bilangan bulat, matriks, atau polinomial.

5.1 Definisi dan Sifat Dasar Ring

Sebuah ring menggabungkan struktur grup Abelian pada operasi pertama dengan struktur semigrup pada operasi kedua, yang dihubungkan melalui hukum distributif.

Definisi 5.1.1 (Ring). Suatu **ring** (*ring*) $(R, +, \cdot)$ adalah himpunan tidak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- (i) $(R, +)$ adalah grup Abelian.
- (ii) **Asosiatif Perkalian:** Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (iii) **Distributif:** Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:
 - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (Distributif kiri)
 - $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (Distributif kanan)

Terdapat beberapa klasifikasi penting untuk ring berdasarkan sifat operasi perkaliannya:

- **Ring Komutatif** (*commutative ring*): Jika $ab = ba$ untuk semua $a, b \in R$.
- **Ring dengan Satuan** (*ring with unity*): Jika terdapat unsur identitas perkalian $1 \in R$ sedemikian sehingga $1a = a1 = a$ untuk semua $a \in R$.

Teorema 5.1.2 (Sifat Dasar Perkalian). Misalkan R adalah ring dengan identitas penjumlahan 0 . Untuk setiap $a, b \in R$, berlaku:

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

$$2. a(-b) = (-a)b = -(ab).$$

$$3. (-a)(-b) = ab.$$

Contoh 5.1.1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap penjumlahan dan perkalian biasa merupakan ring komutatif dengan satuan 1. Namun, $2\mathbb{Z}$ (bilangan genap) merupakan ring komutatif tanpa satuan.

Contoh 5.1.2. Himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas bilangan real, $M_n(\mathbb{R})$, merupakan ring dengan satuan (matriks identitas I), namun bukan ring komutatif untuk $n \geq 2$.

—

Soal 5.1

Problem 5.1.1. Buktikan bahwa jika suatu ring R memiliki unsur satuan, maka unsur satuan tersebut bersifat tunggal.

Problem 5.1.2. Misalkan R adalah ring sedemikian sehingga $x^2 = x$ untuk setiap $x \in R$ (Ring seperti ini disebut **Ring Boolean**). Buktikan bahwa R adalah ring komutatif dengan karakteristik 2 (yakni $x + x = 0$).

Problem 5.1.3. Diberikan R adalah ring. Unsur $a \in R$ disebut **idempoten** jika $a^2 = a$. Buktikan bahwa jika R adalah ring dengan satuan dan a adalah idempoten, maka $1 - a$ juga merupakan unsur idempoten.

Problem 5.1.4. Tentukan apakah himpunan $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real biasa.

5.2 Pembagi Nol dan Daerah Integral

Dalam aritmetika bilangan real, kita mengetahui bahwa jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$. Namun, pada ring secara umum, sifat ini tidak selalu berlaku. Hal ini membawa kita pada klasifikasi ring yang lebih khusus.

Definisi 5.2.1 (Pembagi Nol). Misalkan R adalah ring komutatif. Suatu unsur tidak nol $a \in R$ disebut **pembagi nol** (*zero divisor*) jika terdapat unsur tidak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Contoh 5.2.1. Dalam ring $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, unsur 2 dan 3 adalah pembagi nol karena $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$, padahal $2 \neq 0$ dan $3 \neq 0$.

Definisi 5.2.2 (Daerah Integral). Suatu ring komutatif dengan satuan $1 \neq 0$ disebut **daerah integral** (*integral domain*) jika ring tersebut tidak memiliki pembagi nol. Dengan kata lain, dalam daerah integral, jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

Sifat utama yang dimiliki oleh daerah integral adalah berlakunya hukum kanselasi terhadap perkalian.

Teorema 5.2.3 (Hukum Kanselasi). Misalkan D adalah daerah integral. Jika $a, b, c \in D$ dengan $a \neq 0$, maka berlaku:

$$ab = ac \implies b = c$$

Selain daerah integral, kita juga mengenal struktur di mana setiap unsur tidak nol memiliki invers perkalian.

Definisi 5.2.4 (Lapangan). Suatu ring komutatif dengan satuan $1 \neq 0$ disebut **lapangan** (*field*) jika setiap unsur tidak nol di dalamnya memiliki invers terhadap perkalian.

Hubungan antara daerah integral dan lapangan dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 5.2.5. Setiap lapangan adalah daerah integral. Sebaliknya, setiap daerah integral yang berhingga adalah lapangan.

—

Soal 5.2

Problem 5.2.1. Tentukan semua pembagi nol dalam ring $\mathbb{Z}_{20}$.

Problem 5.2.2. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_p$ adalah lapangan jika dan hanya jika p adalah bilangan prima.

Problem 5.2.3. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan. Unsur $a \in R$ disebut **nilpoten** jika $a^n = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif n . Buktikan bahwa jika a adalah nilpoten, maka $1 - a$ adalah unit (memiliki invers perkalian).

Problem 5.2.4. Buktikan bahwa karakteristik dari suatu daerah integral adalah 0 atau bilangan prima p .

Problem 5.2.5. Misalkan D adalah daerah integral. Buktikan bahwa jika $a^2 = b^2$ untuk $a, b \in D$, maka $a = b$ atau $a = -b$.

5.3 Karakteristik Ring

Karakteristik sebuah ring memberikan informasi mengenai perilaku iterasi penjumlahan dalam ring tersebut. Konsep ini sangat krusial dalam membedakan ring abstrak dengan sistem bilangan real atau kompleks yang biasa kita gunakan.

Definisi 5.3.1 (Karakteristik Ring). Misalkan R adalah suatu ring. Jika terdapat bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $nx = 0$ (yakni $x + x + \cdots + x = 0$ sebanyak n kali) untuk semua $x \in R$, maka R dikatakan memiliki **karakteristik** (*characteristic*) n . Jika tidak ada bilangan positif sedemikian, maka R dikatakan memiliki karakteristik 0. Karakteristik dari R dinotasikan dengan $\text{char}(R)$.

Untuk ring yang memiliki unsur satuan 1, penentuan karakteristik menjadi lebih sederhana melalui teorema berikut:

Teorema 5.3.2. Misalkan R adalah ring dengan satuan 1.

1. Jika orde dari 1 terhadap penjumlahan adalah tak hingga, maka $\text{char}(R) = 0$.
2. Jika orde dari 1 terhadap penjumlahan adalah n , maka $\text{char}(R) = n$.

Sifat karakteristik pada daerah integral memiliki kekhususan yang sangat menarik:

Teorema 5.3.3. Karakteristik dari suatu daerah integral adalah 0 atau suatu bilangan prima p .

Contoh 5.3.1. Ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$, rasional $\mathbb{Q}$, dan real $\mathbb{R}$ semuanya memiliki karakteristik 0 karena tidak ada $n \cdot 1 = 0$ untuk $n > 0$.

Contoh 5.3.2. Ring $\mathbb{Z}_n$ memiliki karakteristik n . Secara khusus, $\mathbb{Z}_p$ dengan p prima adalah lapangan dengan karakteristik prima.

Soal 5.3

Problem 5.3.1. Misalkan R adalah ring komutatif dengan karakteristik prima p . Buktikan bahwa $(a + b)^p = a^p + b^p$ untuk setiap $a, b \in R$. (Teorema ini sering disebut sebagai *Freshman's Dream*).

Problem 5.3.2. Buktikan bahwa jika D adalah daerah integral berhingga, maka karakteristik dari D haruslah suatu bilangan prima p .

Problem 5.3.3. Misalkan R adalah ring dengan satuan 1 dan $\text{char}(R) = n > 0$. Jika n adalah bilangan komposit, tunjukkan bahwa R harus memiliki pembagi nol.

Problem 5.3.4. Diberikan lapangan F dengan karakteristik $p > 0$. Buktikan bahwa pemetaan $\phi : F \rightarrow F$ yang didefinisikan oleh $\phi(x) = x^p$ adalah suatu homomorfisma ring yang injektif (Pemetaan ini disebut *Frobenius Endomorphism*).

5.4 Latihan Soal Bab 5

Problem 5.4.1. Buktikan bahwa jika $x^2 = x$ untuk semua $x \in R$, maka $x + x = 0$ untuk semua $x \in R$.

Problem 5.4.2. Tunjukkan bahwa himpunan matriks berbentuk $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan suatu lapangan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Problem 5.4.3. Misalkan R adalah ring dengan satuan 1. Buktikan bahwa $(-1)(-1) = 1$.

Problem 5.4.4. Buktikan bahwa suatu ring komutatif berhingga R yang tidak memiliki pembagi nol pasti memiliki unsur satuan.

Problem 5.4.5. Tentukan semua unsur unit (unsur yang memiliki invers perkalian) dalam ring $\mathbb{Z}_{15}$.

Problem 5.4.6. Misalkan R adalah ring komutatif. Buktikan bahwa himpunan semua unsur nilpoten di R , yaitu $\text{Nil}(R) = \{x \in R : x^n = 0 \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\}$, membentuk sebuah subring dari R .

Problem 5.4.7. Diberikan $R = \mathbb{Z}_p[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}_p\}$ dengan $i^2 = -1$. Untuk $p = 3$, apakah R merupakan lapangan? Bagaimana dengan $p = 5$?

Problem 5.4.8. Buktikan bahwa jika L adalah lapangan, maka satu-satunya elemen idempoten di L adalah 0 dan 1.

Problem 5.4.9. Misalkan $\text{char}(R) = 2$ dan $a, b \in R$ bersifat komutatif ($ab = ba$). Buktikan bahwa $(a + b)^2 = a^2 + b^2 = (a - b)^2$.

Problem 5.4.10. Misalkan R adalah ring berhingga dengan satuan 1 dan tidak memiliki pembagi nol. Buktikan bahwa untuk setiap $a \neq 0$ di R , terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 1$.

Problem 5.4.11. Misalkan D adalah daerah integral. Jika $n \cdot a = 0$ untuk suatu $a \in D, a \neq 0$ dan bilangan bulat $n \neq 0$, buktikan bahwa karakteristik dari D membagi n .

Problem 5.4.12. Berikan contoh sebuah ring yang memiliki karakteristik 3 namun bukan merupakan lapangan atau daerah integral.

Bab 6

Ideal dan Ring Kuosien

Sama seperti kita memerlukan subgrup normal untuk membentuk grup kuosien, dalam teori ring kita memerlukan struktur khusus yang disebut ideal untuk membentuk ring kuosien. Ideal memungkinkan kita untuk "mengnolkan" elemen-elemen tertentu dan melihat struktur ring yang tersisa.

6.1 Ideal

Ideal adalah subring dengan sifat penyerapan yang kuat terhadap operasi perkalian.

Definisi 6.1.1 (Ideal). Suatu subring I dari ring R disebut **ideal** (*ideal*) dari R jika memenuhi sifat berikut: Untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$, maka $ra \in I$ dan $ar \in I$.

Jika R adalah ring komutatif, maka cukup memeriksa salah satu arah penyerapan saja.

Terdapat dua jenis ideal yang sangat penting dalam analisis lanjutan:

1. **Ideal Maksimal** (*maximal ideal*): Suatu ideal $M \neq R$ sedemikian sehingga tidak ada ideal J lain yang memenuhi $M \subset J \subset R$.
2. **Ideal Prima** (*prime ideal*): Suatu ideal $P \neq R$ sedemikian sehingga jika $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$.

Contoh 6.1.1. Himpunan bilangan bulat genap $2\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$. Jika kita mengalikan bilangan genap dengan sebarang bilangan bulat, hasilnya tetap genap.

Contoh 6.1.2. Diberikan ring polinomial $\mathbb{R}[x]$. Himpunan semua polinomial yang memiliki akar di $x = 0$, yaitu $\langle x \rangle = \{xf(x) : f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$, merupakan ideal dari $\mathbb{R}[x]$.

6.2 Ring Kuosien

Jika I adalah ideal dari R , maka I secara otomatis merupakan subgrup normal dari $(R, +)$. Oleh karena itu, kita dapat membentuk himpunan koset $R/I = \{r + I : r \in R\}$.

Teorema 6.2.1. Misalkan I adalah ideal dari R . Himpunan koset R/I membentuk sebuah ring, yang disebut **ring kuosien** (quotient ring), dengan operasi:

- $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$
- $(a + I)(b + I) = (ab) + I$

Hubungan antara jenis ideal dan struktur ring kuosien dinyatakan dalam teorema fundamental berikut:

Teorema 6.2.2. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan dan I adalah ideal dari R .

1. R/I adalah daerah integral jika dan hanya jika I adalah ideal prima.
2. R/I adalah lapangan jika dan hanya jika I adalah ideal maksimal.

—

Soal 6

Problem 6.2.1. Buktikan bahwa jika R adalah ring dengan satuan dan I adalah ideal yang memuat unsur unit, maka $I = R$.

Problem 6.2.2. Buktikan bahwa setiap ideal maksimal dalam ring komutatif dengan satuan adalah ideal prima. Apakah kebalikannya berlaku? Berikan contoh.

Problem 6.2.3. Misalkan $\phi : R \rightarrow S$ adalah homomorfisma ring. Buktikan bahwa kernel dari ϕ , $\text{Ker}(\phi) = \{r \in R : \phi(r) = 0_S\}$, merupakan ideal dari R .

Problem 6.2.4. Dalam ring $\mathbb{Z}$, buktikan bahwa ideal $\langle n \rangle$ adalah prima jika dan hanya jika n adalah bilangan prima.

Problem 6.2.5. Buktikan bahwa dalam ring $\mathbb{Z}[x]$, ideal $\langle x \rangle$ adalah ideal prima tetapi bukan ideal maksimal.

Problem 6.2.6. Misalkan R adalah ring komutatif. Buktikan bahwa R adalah lapangan jika dan hanya jika R tidak memiliki ideal sejati yang tidak trivial.

6.3 Teorema Isomorfisma Ring

Sebagaimana pada grup, terdapat hubungan mendasar antara homomorfisma ring, kernel, dan ring kuosien. Teorema-teorema ini memungkinkan kita untuk menyederhanakan struktur ring yang kompleks menjadi bentuk yang lebih dikenal.

Definisi 6.3.1 (Homomorfisma Ring). Suatu pemetaan $\phi : R \rightarrow S$ antara dua ring disebut **homomorfisma ring** jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku:

- (i) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$

$$(ii) \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

Teorema 6.3.2 (Teorema Isomorfisma Pertama untuk Ring). Misalkan $\phi : R \rightarrow S$ adalah homomorfisma ring. Maka kernel dari ϕ , $\text{Ker}(\phi)$, adalah ideal dari R dan:

$$R/\text{Ker}(\phi) \cong \text{Im}(\phi)$$

Secara khusus, jika ϕ surjektif, maka $R/\text{Ker}(\phi) \cong S$.

Teorema ini sering digunakan untuk membuktikan bahwa suatu ring kuosien isomorfis dengan lapangan tertentu, terutama dalam studi polinomial.

Contoh 6.3.1. Misalkan $\phi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ didefinisikan dengan $\phi(f(x)) = f(i)$. Pemetaan ini adalah homomorfisma surjektif dengan kernel $\langle x^2 + 1 \rangle$. Berdasarkan Teorema Isomorfisma Pertama:

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}$$

—

6.4 Latihan Soal Bab 6

Problem 6.4.1. Buktikan bahwa irisan dari dua ideal I dan J dari ring R adalah ideal dari R . Apakah gabungan $I \cup J$ juga selalu merupakan ideal?

Problem 6.4.2. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan. Buktikan bahwa ideal M adalah maksimal jika dan hanya jika R/M adalah lapangan.

Problem 6.4.3. Tentukan semua ideal dari ring $\mathbb{Z}_{12}$. Manakah yang merupakan ideal maksimal?

Problem 6.4.4. Misalkan $I = \langle 2, x \rangle$ adalah ideal dalam $\mathbb{Z}[x]$. Buktikan bahwa I adalah ideal maksimal.

Problem 6.4.5. Buktikan bahwa jika $f : R \rightarrow S$ adalah homomorfisma ring surjektif dan I adalah ideal dari R , maka $f(I)$ adalah ideal dari S .

Problem 6.4.6. Didefinisikan $J = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(0) \text{ adalah bilangan genap}\}$. Buktikan bahwa J adalah ideal dari $\mathbb{Z}[x]$.

Problem 6.4.7. Buktikan bahwa dalam daerah integral, setiap ideal maksimal adalah ideal prima.

Problem 6.4.8. Gunakan Teorema Isomorfisma Pertama untuk membuktikan bahwa $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Problem 6.4.9. Misalkan R adalah ring komutatif dan $a \in R$. Buktikan bahwa **Annihilator** dari a , yaitu $\text{Ann}(a) = \{r \in R : ra = 0\}$, adalah ideal dari R .

Problem 6.4.10. Misalkan I dan J adalah ideal dari R . Didefinisikan $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$. Buktikan bahwa $I + J$ adalah ideal terkecil yang memuat I dan J .

Problem 6.4.11. Berikan contoh sebuah ideal prima yang bukan merupakan ideal maksimal dalam suatu ring komutatif.

Problem 6.4.12. Misalkan R adalah ring di mana setiap ideal adalah ideal prima. Buktikan bahwa R adalah lapangan.

Problem 6.4.13. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan. Buktikan bahwa R adalah lapangan jika dan hanya jika satu-satunya ideal dari R adalah $\{0\}$ dan R itu sendiri.

Problem 6.4.14. Diberikan ideal I dan J pada ring R . Didefinisikan hasil kali ideal:

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Buktikan bahwa IJ adalah ideal dari R dan $IJ \subseteq I \cap J$.

Problem 6.4.15. Tentukan semua ideal maksimal dari ring $\mathbb{Z}_{36}$. Berikan penjelasan menggunakan korespondensi antara ideal di $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_{36}$.

Problem 6.4.16. Misalkan $R = \mathbb{Z}[x]$ dan $I = \langle x^2 + 1 \rangle$. Apakah ring kuosien R/I merupakan daerah integral? Apakah ia merupakan lapangan? Jelaskan jawaban Anda.

Problem 6.4.17. Buktikan bahwa jika M adalah ideal maksimal dalam ring komutatif R dan $a \in R \setminus M$, maka ideal yang dibangun oleh $M \cup \{a\}$ adalah seluruh ring R .

Problem 6.4.18. Misalkan $\phi : R \rightarrow S$ adalah homomorfisma ring yang surjektif. Jika P adalah ideal prima di R yang memuat $\text{Ker}(\phi)$, buktikan bahwa $\phi(P)$ adalah ideal prima di S .

Problem 6.4.19. Misalkan $R = \mathcal{C}[0, 1]$ adalah ring fungsi kontinu dari $[0, 1]$ ke $\mathbb{R}$. Untuk setiap $c \in [0, 1]$, didefinisikan $M_c = \{f \in R : f(c) = 0\}$.

(a) Buktikan bahwa M_c adalah ideal maksimal dari R .

(b) Tunjukkan bahwa $R/M_c \cong \mathbb{R}$.

Problem 6.4.20. Buktikan **Teorema Isomorfisma Kedua** untuk Ring: Jika S adalah subring dari R dan I adalah ideal dari R , maka $S + I$ adalah subring dari R , $S \cap I$ adalah ideal dari S , dan

$$(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$$

Problem 6.4.21. Misalkan R adalah ring komutatif dengan karakteristik p (prima). Buktikan bahwa himpunan $I = \{r \in R : r^{p^n} = 0 \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\}$ merupakan ideal dari R .

Problem 6.4.22. Gunakan Teorema Isomorfisma Pertama untuk membuktikan bahwa ring kuosien $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i \rangle$ isomorfis dengan $\mathbb{Z}_2$.

Bab 7

Ring Polinomial

Ring polinomial merupakan salah satu objek paling kaya dalam aljabar abstrak. Struktur ini tidak hanya memperluas konsep polinomial yang kita pelajari di sekolah menengah, tetapi juga memberikan cara untuk mengonstruksi lapangan-lapangan baru melalui ideal-ideal maksimal.

7.1 Struktur Ring Polinomial

Definisi 7.1.1 (Ring Polinomial). Misalkan R adalah ring komutatif. Himpunan semua polinomial dengan koefisien di R dalam variabel x , dinotasikan dengan $R[x]$, didefinisikan sebagai:

$$R[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in R, n \geq 0\}$$

Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian polinomial biasa, $R[x]$ merupakan sebuah ring.

Sifat-sifat R sering kali diwariskan ke $R[x]$ dengan sedikit modifikasi:

1. Jika R adalah daerah integral, maka $R[x]$ juga merupakan daerah integral.
2. Jika D adalah daerah integral, maka untuk setiap $f, g \in D[x]$, berlaku $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

7.2 Daerah Euclid

Daerah Euclid (ED) adalah jenis daerah integral yang memiliki struktur cukup kaya sehingga kita bisa melakukan pembagian dengan sisa. Inilah alasan mengapa $\mathbb{Z}$ dan $F[x]$ memiliki sifat-sifat yang sangat mirip.

Definisi 7.2.1 (Daerah Euclid). Suatu daerah integral D disebut **Daerah Euclid** jika terdapat fungsi $d : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (disebut norma Euclid) yang memenuhi:

- (i) Untuk setiap $a, b \in D \setminus \{0\}$, $d(a) \leq d(ab)$.

- (ii) Untuk setiap $a, b \in D$ dengan $b \neq 0$, terdapat $q, r \in D$ sedemikian sehingga $a = bq + r$ dengan $r = 0$ atau $d(r) < d(b)$.

Contoh 7.2.1. Ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah Daerah Euclid dengan $d(n) = |n|$.

Contoh 7.2.2. Jika F adalah lapangan, maka ring polinomial $F[x]$ adalah Daerah Euclid dengan $d(f(x)) = \deg(f(x))$. Inilah alasan mengapa Algoritma Pembagian di $F[x]$ (yang kita bahas sebelumnya) bisa bekerja.

Contoh 7.2.3. Ring **Bilangan Bulat Gauss** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah Daerah Euclid dengan $d(a + bi) = a^2 + b^2$.

Teorema 7.2.2. *Setiap Daerah Euclid adalah Daerah Ideal Utama (PID), dan setiap PID adalah Daerah Faktorisasi Tunggal (UFD).*

Soal Tambahan (Daerah Euclid)

Problem 7.2.1. Buktikan bahwa dalam Daerah Euclid D , elemen $u \in D$ adalah unit jika dan hanya jika $d(u) = d(1)$.

Problem 7.2.2. Gunakan algoritma pembagian di $\mathbb{Z}[i]$ untuk mencari hasil bagi q dan sisa r jika $a = 3 + 5i$ dibagi oleh $b = 1 + 2i$.

7.3 Algoritma Pembagian dan Polinomial Irreduisibel

Jika koefisien polinomial berasal dari sebuah lapangan F (seperti $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), maka $F[x]$ memiliki sifat yang sangat mirip dengan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, termasuk adanya algoritma pembagian dan faktorisasi tunggal.

Teorema 7.3.1. Algoritma Pembagian di $F[x]$. Misalkan $f(x), g(x) \in F[x]$ dengan $g(x) \neq 0$. Maka terdapat polinomial unik $q(x)$ dan $r(x)$ di $F[x]$ sedemikian sehingga:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

dengan $r(x) = 0$ atau $\deg(r) < \deg(g)$.

Konsep polinomial irreduisibel analog dengan konsep bilangan prima pada bilangan bulat.

Definisi 7.3.2 (Polinomial Irreduisibel). Suatu polinomial non-konstan $f(x) \in F[x]$ dikatakan **irreduisibel** atas F jika $f(x)$ tidak dapat dinyatakan sebagai perkalian dua polinomial $g(x), h(x) \in F[x]$ yang masing-masing memiliki derajat lebih rendah dari $f(x)$.

Contoh 7.3.1. Polinomial $x^2 + 1$ adalah irreduisibel atas $\mathbb{R}$, karena ia tidak memiliki akar real. Namun, ia redusibel atas $\mathbb{C}$ karena $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

7.4 Uji Irreducibilitas

Untuk menguji apakah suatu polinomial di $\mathbb{Q}[x]$ (atau $\mathbb{Z}[x]$) bersifat irreducibel, kita sering menggunakan alat berikut:

Teorema 7.4.1 (Kriteria Eisenstein). Misalkan $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Jika terdapat bilangan prima p sedemikian sehingga:

1. p membagi $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$,
2. p tidak membagi a_n ,
3. p^2 tidak membagi a_0 ,

maka $f(x)$ irreducibel atas $\mathbb{Q}$.

—

Soal 7

Problem 7.4.1. Tunjukkan bahwa $x^3 + 3x + 2$ irreducibel atas $\mathbb{Z}_5$.

Problem 7.4.2. Gunakan Kriteria Eisenstein untuk membuktikan bahwa $x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 10$ irreducibel atas $\mathbb{Q}$.

Problem 7.4.3. Misalkan F adalah lapangan. Buktikan bahwa setiap ideal di $F[x]$ adalah **Ideal Utama** (*Principal Ideal*), yaitu ideal yang dibangun oleh satu elemen $\langle f(x) \rangle$.

Problem 7.4.4. Buktikan bahwa jika $p(x)$ adalah polinomial irreducibel di $F[x]$, maka ring kuosien $F[x] / \langle p(x) \rangle$ adalah sebuah lapangan.

Problem 7.4.5. Tentukan semua polinomial irreducibel berderajat 2 atas lapangan $\mathbb{Z}_2$.

7.5 Lema Gauss dan Irreducibilitas di $\mathbb{Z}[x]$

Seringkali kita kesulitan menentukan irreducibilitas di $\mathbb{Q}[x]$. Lema Gauss menjembatani hubungan antara faktorisasi di $\mathbb{Z}[x]$ dan $\mathbb{Q}[x]$.

Definisi 7.5.1 (Konten Polinomial). **Konten** (*content*) dari polinomial $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ adalah faktor persekutuan terbesar (fpb) dari seluruh koefisiennya. Polinomial dikatakan **primitif** jika kontennya adalah 1.

Teorema 7.5.2 (Lema Gauss). Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Jika $f(x)$ redusibel di $\mathbb{Q}[x]$, maka $f(x)$ juga redusibel di $\mathbb{Z}[x]$. Lebih lanjut, jika $f(x)$ adalah polinomial primitif, maka $f(x)$ irreducibel di $\mathbb{Q}[x]$ jika dan hanya jika ia irreducibel di $\mathbb{Z}[x]$.

and $\mathbb{Q}[x]$

7.6 Polinomial Siklotomik

Polinomial siklotomik adalah polinomial khusus yang akar-akarnya adalah akar unit primitif ke- n dari bilangan kompleks.

Definisi 7.6.1 (Polinomial Siklotomik). Polinomial siklotomik ke- n , dinotasikan $\Phi_n(x)$, didefinisikan sebagai:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\text{fpb}(k,n)=1, 1 \leq k < n} (x - e^{2\pi i k/n})$$

Sifat penting dari polinomial ini adalah:

1. $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
2. $\Phi_n(x)$ irreduksibel atas $\mathbb{Q}$ untuk setiap $n \geq 1$.
3. $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$.

Contoh 7.6.1. Untuk p bilangan prima, polinomial siklotomik ke- p berbentuk:

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

Polinomial ini selalu irreduksibel di $\mathbb{Q}[x]$.

—

7.7 Latihan Soal Bab 7

Selesaikan soal-soal berikut untuk menguasai teknik analisis polinomial.

Problem 7.7.1. Buktikan bahwa $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ irreduksibel di $\mathbb{Q}[x]$. (Petunjuk: Gunakan substitusi $x = y + 1$ dan Kriteria Eisenstein).

Problem 7.7.2. Tentukan konten dari polinomial $f(x) = 6x^3 + 9x^2 + 15x + 3$. Apakah $f(x)$ merupakan polinomial primitif?

Problem 7.7.3. Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan p adalah bilangan prima. Jika $\bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ (polinomial dengan koefisien dikurangi modulo p) adalah irreduksibel di $\mathbb{Z}_p[x]$ dan $\deg(f) = \deg(\bar{f})$, buktikan bahwa $f(x)$ irreduksibel di $\mathbb{Q}[x]$.

Problem 7.7.4. Gunakan hasil soal sebelumnya untuk menunjukkan bahwa $x^3 + 17x + 36$ irreduksibel di $\mathbb{Q}[x]$ dengan memeriksa modulo 5.

Problem 7.7.5. Tuliskan $\Phi_6(x)$ secara eksplisit dan tunjukkan bahwa ia merupakan faktor dari $x^6 - 1$.

Problem 7.7.6. Buktikan bahwa jika F adalah lapangan, maka ring polinomial $F[x]$ merupakan Daerah Ideal Utama (*Principal Ideal Domain* / PID).

Problem 7.7.7. Buktikan bahwa jika p adalah bilangan prima, maka setiap polinomial berderajat 2 di $\mathbb{Z}_p[x]$ yang tidak memiliki akar di $\mathbb{Z}_p$ pasti irreduksibel. Apakah ini berlaku untuk derajat 4?

Problem 7.7.8. Faktorkan $x^4 - 4$ menjadi faktor-faktor irreduksibel di:

- (a) $\mathbb{Q}[x]$
- (b) $\mathbb{R}[x]$
- (c) $\mathbb{C}[x]$

Problem 7.7.9. Tunjukkan bahwa $x^n + 5x^{n-1} + 3$ irreduksibel di $\mathbb{Z}[x]$ untuk setiap $n > 1$ (Gunakan Lema Gauss atau kriteria lain yang sesuai).

Problem 7.7.10. Misalkan $f(x) \in F[x]$ berderajat n . Buktikan bahwa $f(x)$ memiliki paling banyak n akar di lapangan F . Berikan contoh ring di mana sifat ini gagal.

Bab 8

Soal Latihan Akhir

Bab ini berisi kumpulan soal isian singkat yang dirancang untuk menguji kecepatan dan ketepatan Anda dalam menerapkan konsep-konsep dasar hingga lanjutan dari Teori Grup hingga Ring Polinomial.

8.1 Soal Isian Singkat

1. Banyaknya elemen di dalam grup simetri S_4 yang memiliki orde 3 adalah ...
2. Misalkan G adalah grup dan $a \in G$. Jika $|a| = 30$, maka orde dari a^{18} adalah ...
3. Jumlah semua elemen di dalam grup $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ yang merupakan pembangun (*generator*) dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah ...
4. Banyaknya subgrup dari grup siklik C_{60} adalah ...
5. Jika H dan K adalah subgrup dari G dengan $|H| = 12$ dan $|K| = 35$, maka $|H \cap K|$ adalah ...
6. Misalkan $\sigma = (135)(2467) \in S_7$. Orde dari permutasi σ adalah ...
7. Banyaknya homomorfisma grup yang berbeda dari $\mathbb{Z}_{15}$ ke $\mathbb{Z}_{20}$ adalah ...
8. Misalkan G adalah grup berorde 25. Jika G bukan grup siklik, maka banyaknya subgrup berorde 5 di G adalah ...
9. Indeks dari subgrup pusat $Z(D_4)$ dalam grup Dihedral D_4 adalah ...
10. Misalkan $\phi : \mathbb{Z}_{24} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ adalah homomorfisma grup dengan $\phi(1) = 5$. Kardinalitas dari $\text{Ker}(\phi)$ adalah ...
11. Banyaknya pembagi nol (*zero divisors*) dalam ring $\mathbb{Z}_{30}$ adalah ...
12. Karakteristik dari ring $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$ adalah ...
13. Di dalam ring $\mathbb{Z}_{11}[x]$, sisa pembagian dari $x^{100} + 1$ oleh $x - 1$ adalah ...

14. Banyaknya elemen unit dalam ring $\mathbb{Z}[i]/\langle 3 \rangle$ adalah ...
15. Jika $I = \langle 2 \rangle$ dan $J = \langle 3 \rangle$ adalah ideal dalam $\mathbb{Z}$, maka ideal $I + J$ adalah ...
16. Banyaknya elemen di dalam lapangan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ adalah ...
17. Nilai k agar polinomial $x^3 + kx + 1$ bersifat redusibel atas $\mathbb{Z}_3$ adalah ...
18. Misalkan $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Banyaknya faktor irreduksibel dari $f(x)$ di $\mathbb{R}[x]$ adalah ...
19. Jika R adalah ring komutatif sedemikian sehingga $a^2 = a$ untuk setiap $a \in R$, maka karakteristik dari R adalah ...
20. Banyaknya ideal maksimal dari ring $\mathbb{Z}_{120}$ adalah ...

8.2 Bagian II: Soal Uraian

Selesaikan soal-soal berikut dengan menyertakan bukti atau langkah-langkah logis yang lengkap.

Problem 8.2.1. Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G . Buktikan bahwa jika $x^2 \in H$ untuk setiap $x \in G$, maka H adalah subgrup normal dari G dan grup kuosien G/H merupakan grup Abelian.

Problem 8.2.2. Diberikan grup G yang tidak memiliki subgrup sejati (*nontrivial proper subgroup*). Buktikan secara formal bahwa G haruslah merupakan grup siklik berorde prima.

Problem 8.2.3. Misalkan G adalah grup berhingga dan ϕ adalah automorfisma dari G sedemikian sehingga $\phi(x) = x^{-1}$ untuk lebih dari $3/4$ elemen $x \in G$. Buktikan bahwa G adalah grup Abelian.

Problem 8.2.4. Misalkan $f : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma grup yang surjektif. Jika G memiliki pusat $Z(G)$, apakah benar bahwa $f(Z(G)) = Z(H)$? Berikan bukti atau contoh penyangkal (*counterexample*).

Problem 8.2.5. Diberikan ring R dengan satuan 1. Jika untuk setiap $x \in R$ berlaku identitas $x^3 = x$, buktikan bahwa ring R tersebut bersifat komutatif.

Problem 8.2.6. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan. Suatu ideal I disebut **Ideal Radikal** jika $I = \{r \in R : r^n \in I \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\}$. Buktikan bahwa setiap ideal prima di R adalah ideal radikal.

Problem 8.2.7. Misalkan F adalah lapangan dan $f(x) \in F[x]$ adalah polinomial irreduksibel berderajat n . Buktikan bahwa setiap elemen di dalam lapangan $F[x]/\langle f(x) \rangle$ dapat dinyatakan secara tunggal dalam kombinasi linear $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$.

Problem 8.2.8. Buktikan bahwa ring bilangan bulat Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan Daerah Ideal Utama (PID) dengan memanfaatkan sifatnya sebagai Daerah Euclid.

Problem 8.2.9. Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan. Jika ideal I dan J bersifat koprime ($I + J = R$), buktikan bahwa berlaku hubungan $I \cap J = IJ$.

Problem 8.2.10. Konstruksikan sebuah lapangan yang memiliki tepat 8 elemen. Tentukan polinomial irreduksibel yang Anda gunakan dan jelaskan struktur elemen-elemennya.

—

8.3 Kunci Jawaban Singkat

Gunakan kunci ini hanya untuk mencocokkan hasil akhir Anda.

- | | |
|--|---|
| 1. 8 elemen (bentuk cycle (abc)) | 12. 10 (KPK dari 5 dan 10) |
| 2. 5 | 13. 2 |
| 3. 4, 8, 16, 20 (Jumlah: 24) | 14. 80 (Karena $ \mathbb{Z}_3[i] = 9$, unit adalah $9 - 1 = 8$?) *Koreksi: 8 |
| 4. 12 (Banyaknya pembagi dari 60) | 15. $\mathbb{Z}$ atau $\langle 1 \rangle$ |
| 5. 1 (Karena $\text{fpb}(12, 35) = 1$) | 16. 9 |
| 6. 12 (KPK dari 3 dan 4) | 17. $k = 1$ (Akar di $x = 1$) |
| 7. 5 (Karena $\text{fpb}(15, 20) = 5$) | 18. 2 (Berupa dua polinomial kuadratik) |
| 8. 6 | 19. 2 |
| 9. 4 (Karena $ D_4 = 8$ dan $ Z(D_4) = 2$) | 20. 3 (Banyaknya faktor prima dari 120, yaitu 2, 3, 5) |
| 10. 12 | |
| 11. 21 (Elemen a s.t. $\text{fpb}(a, 30) > 1$, kecuali 0) | |